

# 一般化された2次元流体の乱流特性に関する研究

岩山隆寛 (神戸大学 理学研究科)

共同研究者 渡邊威 (名古屋工業大学 工学研究科)

- ★ 一般化された2次元流体系の強制散逸乱流におけるエンストロフィー慣性領域のスペクトルの導出と数値実験による検証
  - ◇ Watanabe, T. and Iwayama, T., “Unified scaling theory for local and non-local enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence” *J. Phys. Soc. Jpn.* **73** (2004), 3319–3330.
  - ◇ Watanabe, T. and Iwayama, T., “Interacting scales and triad enstrophy transfers in generalized two-dimensional turbulence”. *Phys. Rev. E* **76** (2007), 046303 (11 pages).

# 1 はじめに ( 1 ): 現実大気のスเปクトル

- ★ 地球大気の大規模スケールのエネルギースペクトル  $E(k) \propto k^{-3}$ .  
(Nastom & Gage, 1984)

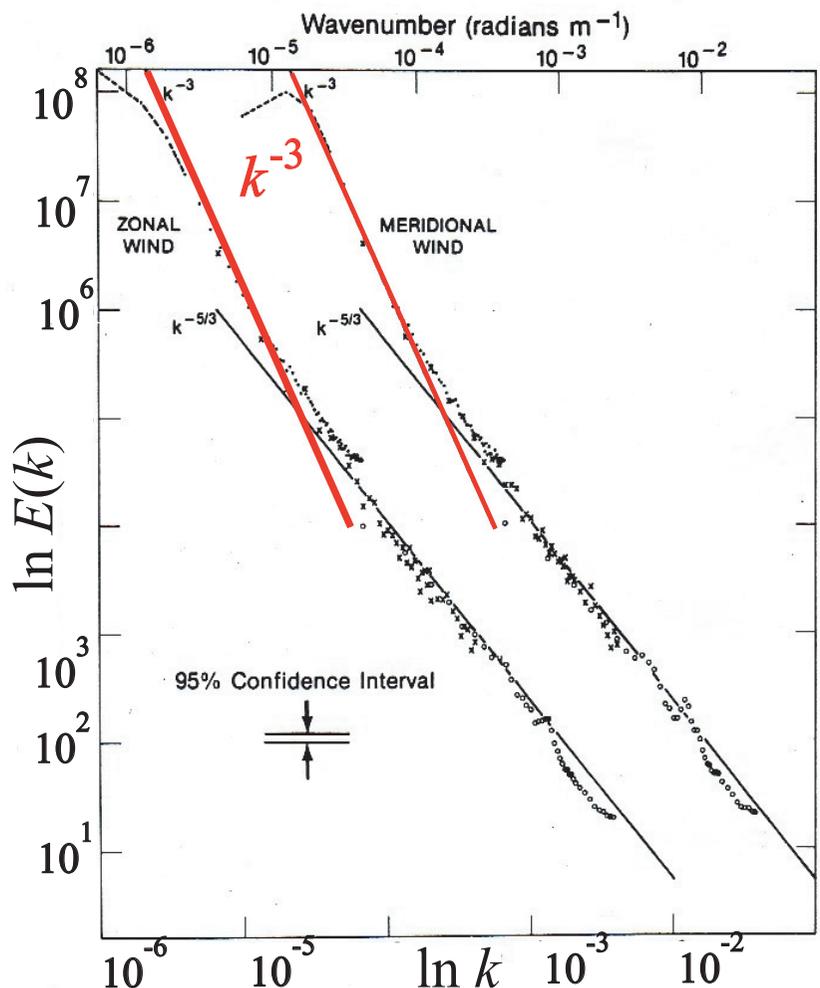


FIG. 2. Wavenumber spectra of zonal and meridional velocity composited from 3 groups of flight segments of different lengths. The 3 types of symbols show results from each group. The straight lines indicate slopes of  $-3$  and  $-5/3$ . The meridional wind spectra are shifted one decade

- ★ 2次元乱流の古典論 ( Kraichnan, 1967 )

◇  $E(k) \propto k^{-3}$  (エンストロフイー慣性領域)

- ★ 大気エネルギースペクトルに、2次元乱流に特有のスペクトルが存在
- ★ 大気科学における2次元乱流の研究の必要性

# 1 はじめに ( 2 ): 2次元乱流の古典論をめぐって

---

★ Kraichnan (1967): 2次元乱流の古典論

$$E(k) \propto k^{-3}, (Q(k) \propto k^{-1} : \text{エンストロフィースペクトル})$$

★ K67 の修正理論 (Kraichnan, 1971; Bowman, 1996)

◇ 対数補正:  $E(k) \propto k^{-3} [\ln k]^{-1/3}$ ,  $(Q(k) \propto k^{-1} [\ln k]^{-1/3})$

◇ K67 との違い・・・K71 では波数空間内の相互作用の非局所性を考慮

★ K67 と K71 のどちらが正しいのか? ... まだ決着が付いていない.

◇ Borue (1993), Gotoh (1998)・・・対数補正あり

◇ Lindborg & Alvelius (2000)・・・対数補正なし

# 1 はじめに ( 3 ) : 一般化された 2 次元流体のエンストロフィースペクトル

---

## ★ 一般化された 2 次元流体系 ( $\alpha$ 乱流系)

- ◇ 複数の 2 次元乱流系を統一的に記述する系 (Pierrehumbert, *et al.* 1994)

$$\frac{\partial}{\partial t} q + J(\varphi, q) = 0, \quad \hat{q}_{\mathbf{k}} = -|\mathbf{k}|^\alpha \hat{\varphi}_{\mathbf{k}} \quad (1)$$

\* Navier-Stokes 系 ( $\alpha = 2$ )

\* Charney-Hasegawa-Mima 系の AM 領域 ( $\alpha = -2$ )

\* Surface Quasi-Geostrophic sys. ( $\alpha = 1$ )

- ◇ 近年活発に研究

(Schorghofer, 2000a; 2000b; Smith *et al.*, 2002; Tran, 2004)

★ エンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトルの冪

◇ エンストロフィースペクトル

$$Q_\alpha(k) \equiv \frac{1}{2} \langle |\hat{q}_k|^2 \rangle_{\text{ang}} \quad (2)$$

◇ K67 を適用  $\implies Q_\alpha(k) \propto k^{(2\alpha-7)/3}$

◇ 数値実験 (Pierrehumbert, *et al.* 1994; Schorghofer, 2000) によると

$$\begin{aligned} & \text{K67 による予測を支持.} && (\alpha < 2) \\ & \text{K67 からのズレ. } Q_\alpha(k) \propto k^{-1}? && (\alpha > 2) \end{aligned} \quad (3)$$

◇  $\alpha = 2$  を境にスペクトルの冪の値が転移

★  $\alpha = 2$  でのスペクトルの転移 . . .

波数空間内の相互作用の非局所性が重要 ( Pierrehumbert *et al.*,  
1994 )

★ しかしながら , . . . 全ての  $\alpha$  に適用可能なエンストロフィー慣性  
領域のスペクトルは導出されていない .

## 本研究

1.  $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域のスペクトルを導出
2. NS 系 ( $\alpha = 2$ ) のエンストロフィースペクトルの議論 ( K67  
vs K71 ) に決着をつける
3. 数値実験による理論の検証

## 2 $\alpha$ 乱流のエンストロフィースペクトルの導出

---

### ★ 次元解析

エンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  の発展方程式

$$\frac{\partial Q_\alpha(k)}{\partial t} = -\frac{\partial \Lambda_\alpha(k)}{\partial k} + \dots \implies [\Lambda_\alpha] = \frac{[kQ_\alpha(k)]}{[t]}$$

$$\Lambda_\alpha(k) = C_\alpha k Q_\alpha(k) \omega_\alpha(k) \quad (4)$$

$\Lambda_\alpha(k)$ ; エンストロフィーフラックス

- ★ 定常状態では  $\Lambda_\alpha(k)$  はエンストロフィー散逸率  $\eta_\alpha$  (定数) に等しい
- ★  $\omega_\alpha(k)$ ; effective shear rate ( $1/[t]$ ) を  $Q_\alpha(k)$  で表現できれば問題は閉じる .

★  $\omega_\alpha(k)$  の表現 (Bowman(1996) の理論を  $\alpha$  乱流に適用) :

$$\omega_\alpha(k) = \left[ \int_{k_1}^k k'^{4-2\alpha} Q_\alpha(k') dk' \right]^{1/2} \dots \text{非局所的} \quad (5)$$

- ◇  $k_1$  ; エンストロフィー慣性領域の最小波数
- ◇ (5) を  $\Lambda_\alpha(k) = C_\alpha k Q_\alpha(k) \omega_\alpha(k)$  に代入 .
- ◇ 定常性より  $\Lambda_\alpha(k) = \eta_\alpha$  を仮定 .
- ◇  $Q_\alpha(k)$  についての微分方程式に帰着

$$\frac{d}{dk} \{k Q_\alpha(k)\}^{-1} = \frac{3C_\alpha^2}{2\eta_\alpha} k^{3-2\alpha} \quad (6)$$

★ 微分方程式 (6) の解

$$Q_\alpha(k) = \left( \frac{2}{3C_\alpha} \right)^{1/3} \underbrace{\eta_\alpha^{2/3} k^{(2\alpha-7)/3}}_{\text{K67 theory}} \underbrace{[\chi_\alpha^+(k)]^{-1/3}}_{\text{correction to K67}} \quad (7)$$

$$\chi_\alpha^+(k) = \frac{1}{4-2\alpha} \left[ 1 - \{1 - (4-2\alpha)\chi_+\} \left( \frac{k_1}{k} \right)^{4-2\alpha} \right] \quad (8)$$

- ◇ 境界値問題 ( $k = k_1$  でスペクトル  $Q_\alpha(k)$  の値を指定)
- ◇  $\chi_+$  は  $Q_\alpha(k_1)$  に依存

$$\chi_+ = \frac{2\eta_\alpha^2}{3C_\alpha^2} k_1^{2\alpha-7} Q_\alpha(k_1)^{-3} \quad (9)$$

★  $\frac{k_1}{k} \ll 1$  (慣性領域) での補正項  $\chi_\alpha^+(k)$  の振る舞い

$$\chi_\alpha^+(k) = \frac{1}{4 - 2\alpha} \left[ 1 - \{1 - (4 - 2\alpha)\chi_+\} \left(\frac{k_1}{k}\right)^{4-2\alpha} \right]$$

◇  $4 - 2\alpha > 0$ , ( $\alpha < 2$ ), のとき  $\chi_\alpha^+(k) \rightarrow \text{const}$

⇒ K67 に一致

◇  $4 - 2\alpha < 0$ , ( $\alpha > 2$ ), のとき  $\chi_\alpha^+(k) \propto \left(\frac{k_1}{k}\right)^{4-2\alpha}$

⇒  $Q_\alpha(k) \propto k^{-1}$

◇  $4 - 2\alpha = 0$ , ( $\alpha = 2$ ) のとき  $\chi_\alpha^+(k) = \chi_+ + \ln\left(\frac{k}{k_1}\right)$

⇒ K71 に一致

★ 全ての  $\alpha$  に適用可能な  $Q_\alpha(k)$  の導出に成功

### 3 数値実験

---

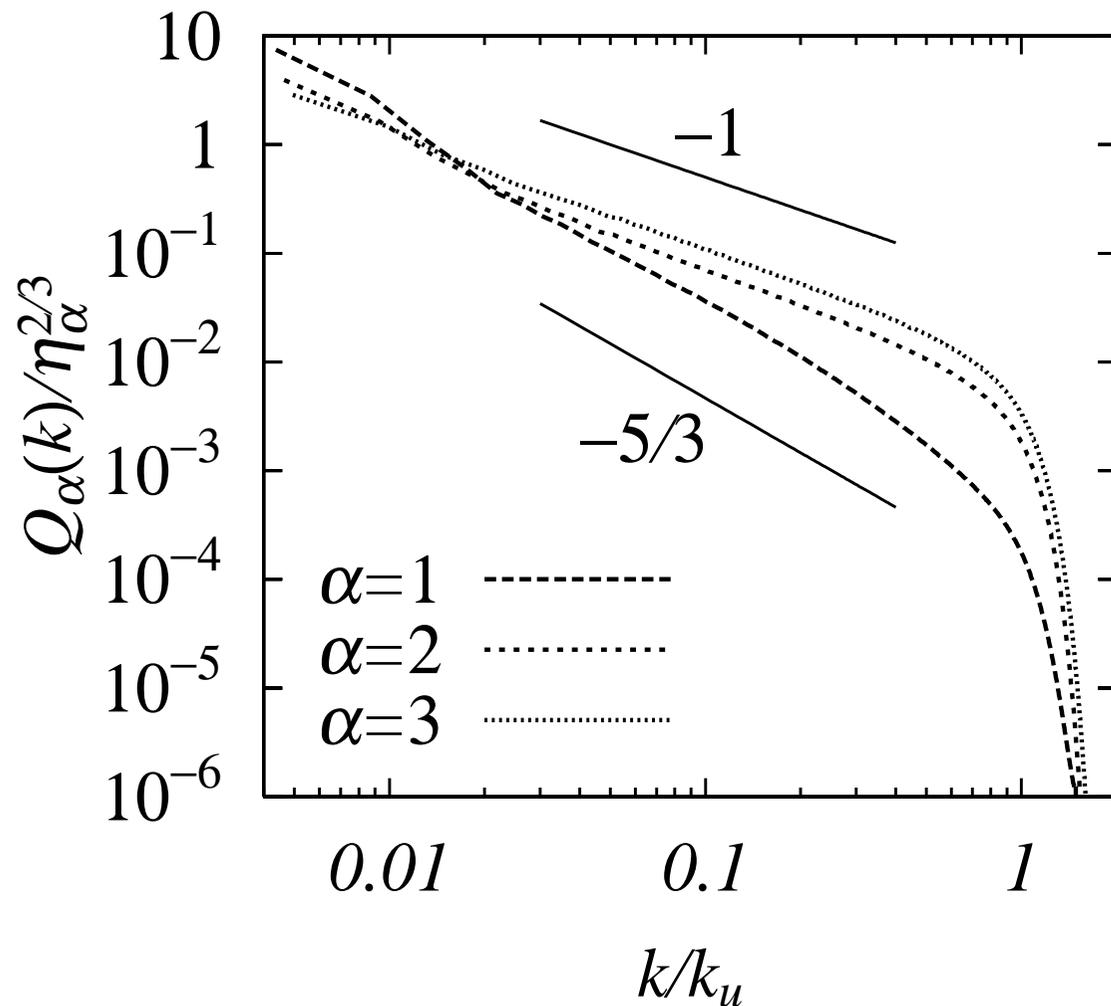
- ★ エンストロフィー-慣性領域の  $Q_\alpha(k)$  の冪を詳細に調べる．理論との比較

#### 3.1 実験条件

---

- ★  $\alpha = 1, 2, 3$  の直接数値計算
- ★ 解像度： $1024^2$  (擬スペクトル法．切断波数：341)
- ★ 外力項： $1 \leq |k| \leq 2$  のモードをランダムに強制
- ★ 高波数側の散逸機構： $-\nu_4 \Delta^4 q$  の超粘性
- ★ 低波数側の散逸機構： $|k| \leq 2$  にのみ  $-\nu_0 q$
- ★ 時間積分：Runge-Kutta scheme

## 3.2 結果



★ K67 理論によると

◇  $Q_1(k) \propto k^{-5/3}$

◇  $Q_2(k) \propto k^{-1}$

◇  $Q_3(k) \propto k^{-1/3},$

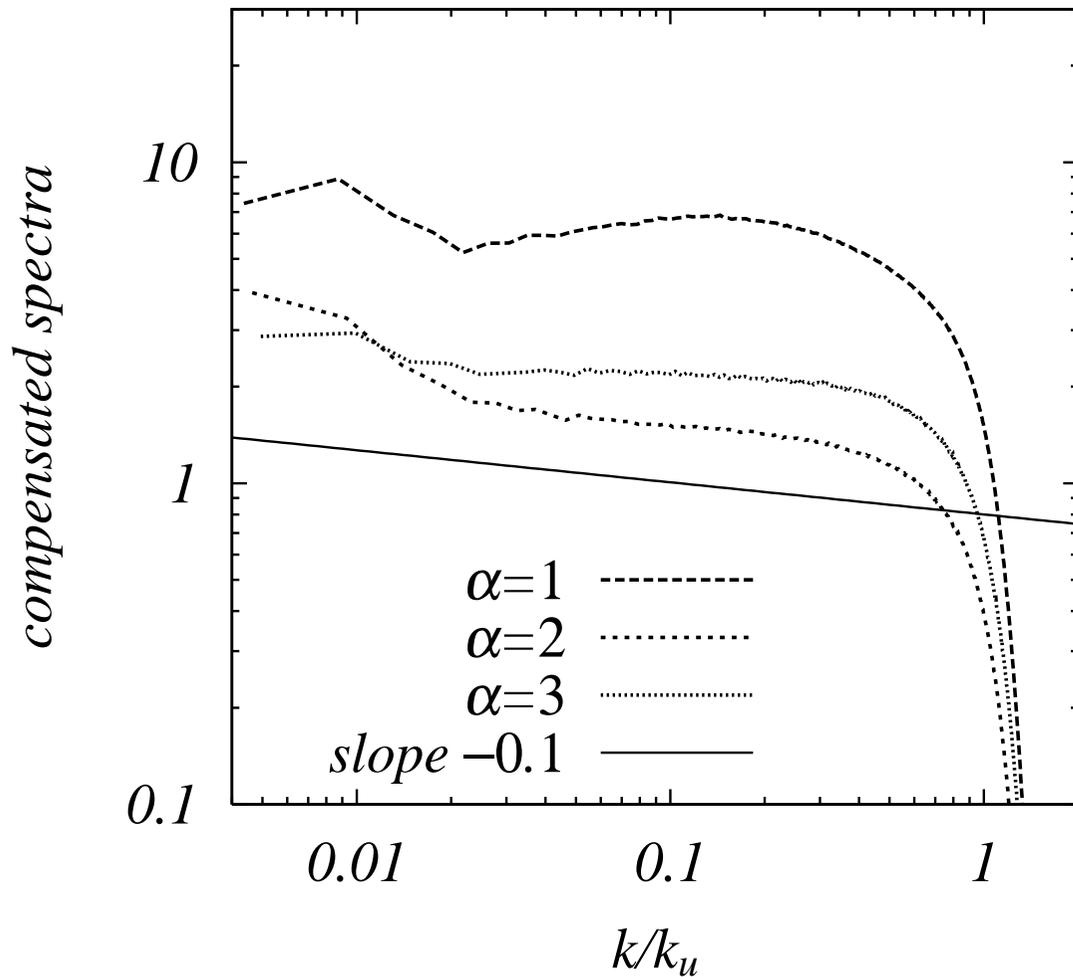
★ 非局所性を考慮した場合

◇  $Q_2(k) \propto k^{-1} \{\ln(k)\}^{-1/3}$

◇  $Q_3(k) \propto k^{-1}$

★ 非局所相互作用の存在

★  $\alpha = 2$  の対数補正は？



- ★  $\alpha = 3$  では  $Q_3(k) \propto k^{-1}$
- ★  $\alpha = 2$  では  $Q_2(k) \propto k^{-1}$  よりも急峻
- ⇒ 対数補正の存在を示唆
- ★  $\alpha = 1$  では  $Q_1(k) \propto k^{-3/5}$  よりも若干緩やか

図 2 compensated enstrophy spectra.  $\alpha = 1$  のとき  $k^{5/3}Q_\alpha(k)$ .  $\alpha = 2, 3$  のとき  $kQ_\alpha(k)$

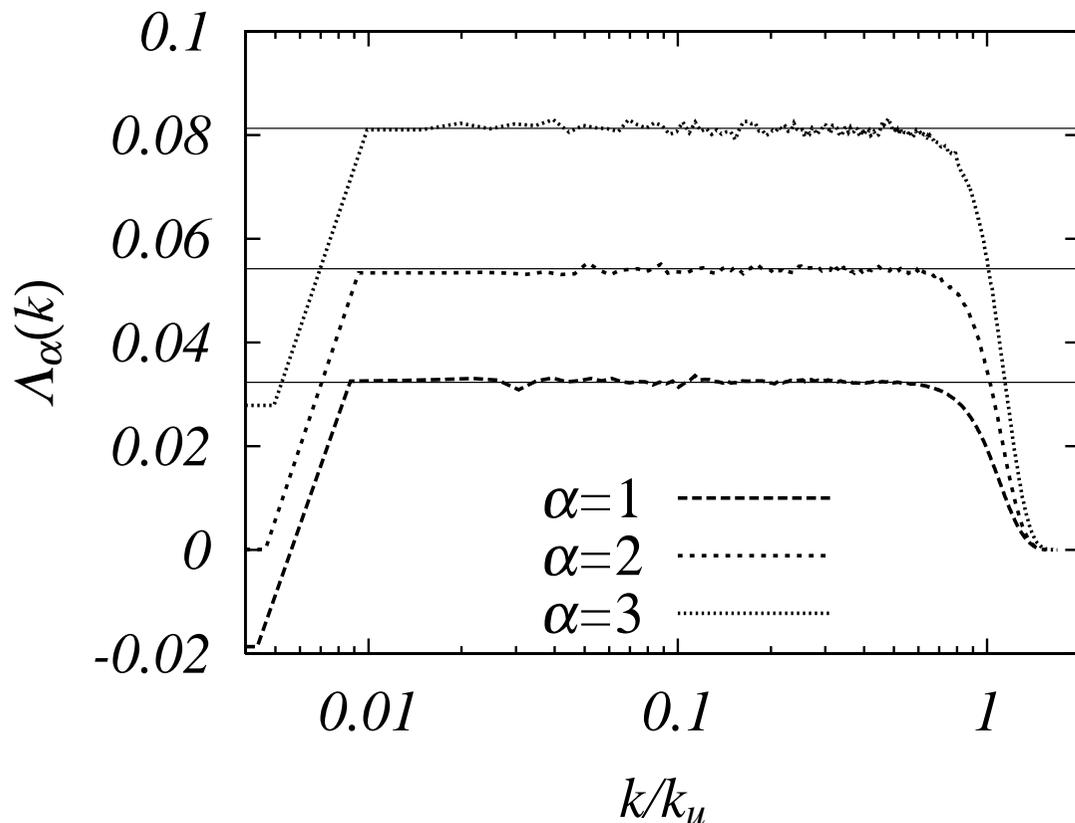
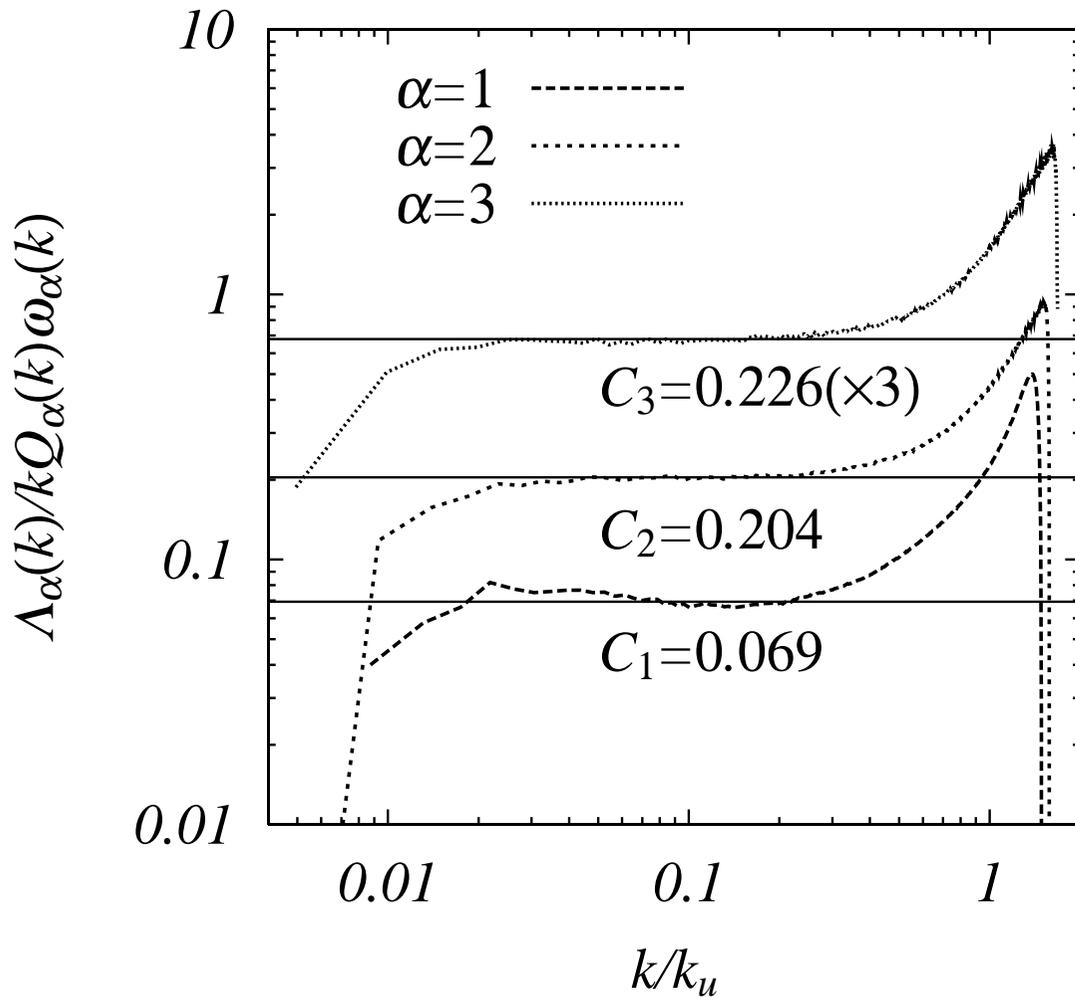


図 3 エンストロフィーフラックス. 実線は各  $\alpha$  でのエンストロフィー散逸率 .

- ★ 理論的な議論で仮定されていたいくつかの事項を確認

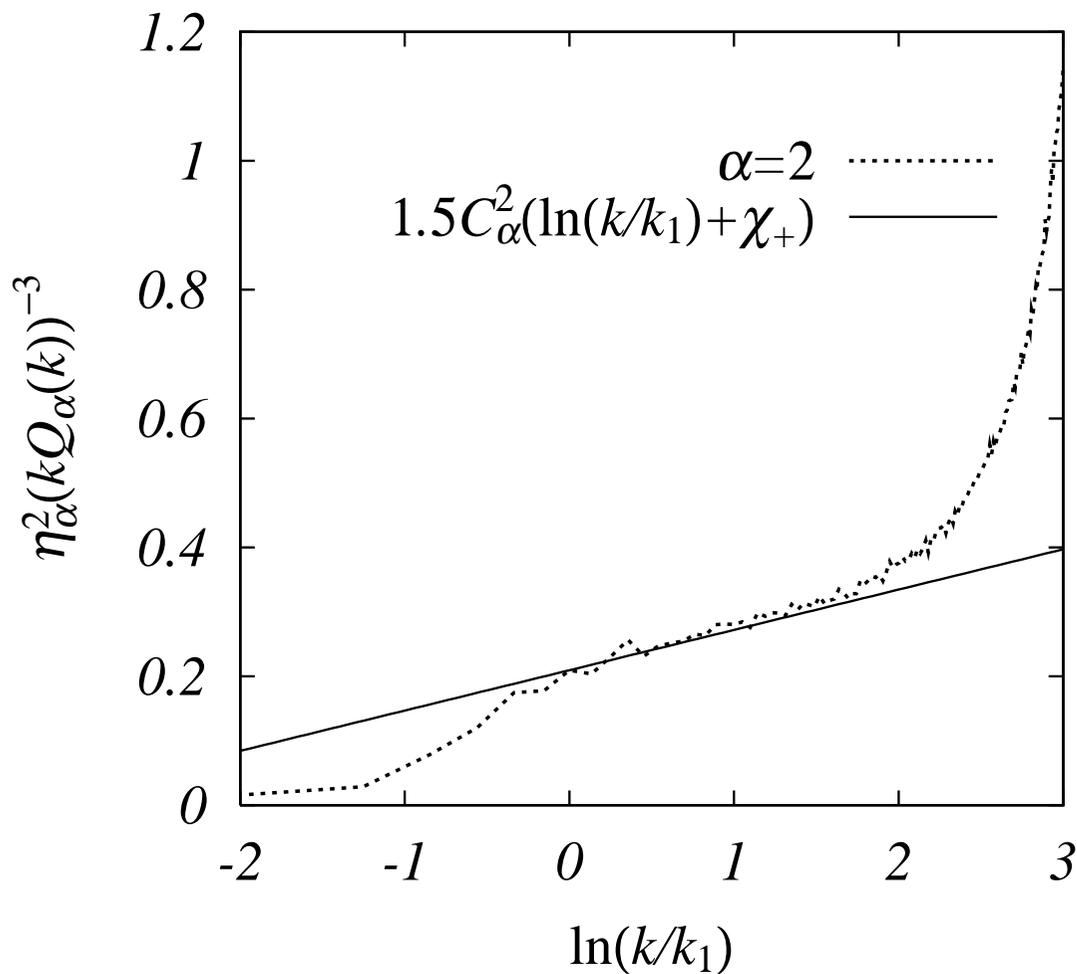
$$\Lambda_\alpha(k) = \eta_\alpha \quad (10)$$

- ★ 強制 , 散逸の効かない波数領域において定常状態では上記の関係が成立しなければならない .
- ★ 2 桁の範囲で妥当



- ★  $\Lambda_\alpha(k) = C_\alpha k Q_\alpha(k) \omega_\alpha(k)$
- $\omega_\alpha(k) = \sqrt{\int_{k_1}^k k'^{4-2\alpha} Q_\alpha(k') dk'}$
- の妥当性
- ★  $\alpha = 2, 3$  では 1 桁程度の幅で上記関係式が成立 .
- ★  $\alpha$  が小さくなると flat な領域が狭くなる .
- ★ 波数空間内の非局所相互作用が存在する .

図 4 エンストロフィーフラックスのモデリングの妥当性



★  $\alpha = 2$  の場合の対数補正の存在を調べる

$$Q_2(k) \propto k^{-1} \{\ln k\}^{-1/3}$$

$$\implies \{k Q_2(k)\}^{-3} \propto \ln k$$

- ◇ 上記の比例関係が成立
- ◇  $\alpha = 2$  の場合，対数補正が存在．

図 5  $\alpha = 2$  の compensated spectrum

## 4 まとめ

---

★ 強制  $\alpha$  乱流のエンストロフィー慣性領域におけるエンストロフィースペクトル  $Q_\alpha(k)$  を理論的・数値的に調べた

1. エンストロフィー慣性領域における  $Q_\alpha(k)$  を系統的に導出

◇  $\alpha < 2$  の場合  $Q_\alpha(k) \propto k^{(2\alpha-7)/3}$

◇  $\alpha = 2$  の場合  $Q_\alpha(k) \propto k^{-1} (\ln k)^{-1/3}$

◇  $\alpha > 2$  では  $Q_\alpha(k) \propto k^{-1}$

2. 数値実験

◇  $\alpha = 2, 3$  では理論的な予測と一致 .

◇ 波数空間内の非局所相互作用の重要性 .

◇  $\alpha = 1$  は理論的な予測からの僅かなズレ . (何故? →

Watanabe and Iwayama (2007) 参照)