

2010/10/20

マグマオーションでの コア・マントル平衡

市川浩樹

愛媛大学 地球深部ダイナミクス研究センター

本発表の概要

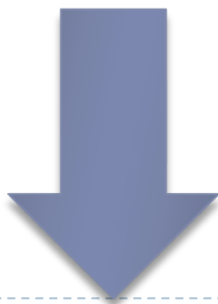
- (1) マグマオーシャン(MO)の紹介
- (2) マグマオーシャンでの数値計算



マグマオーシャン



地球の集積時、表層は隕石の衝突により、高温だった。



表層が溶けていた(マグマオーシャン)

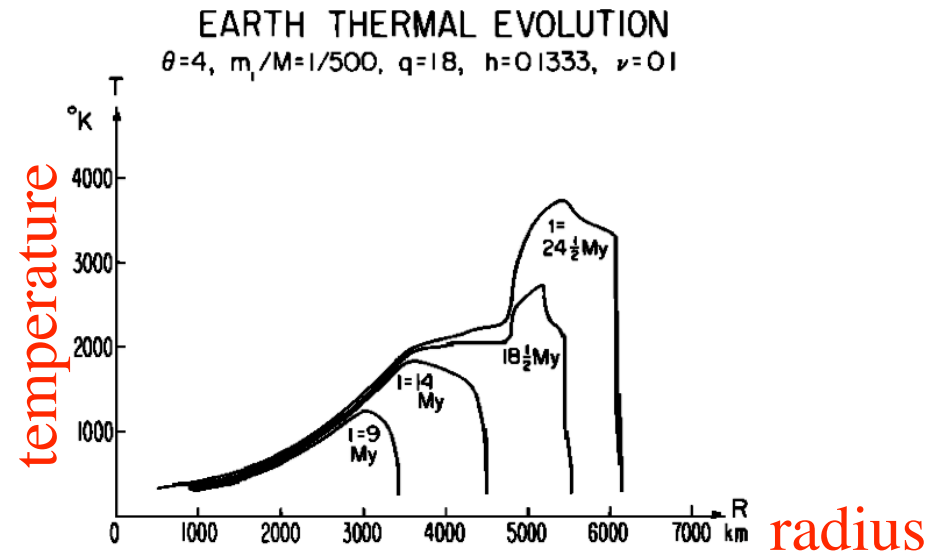
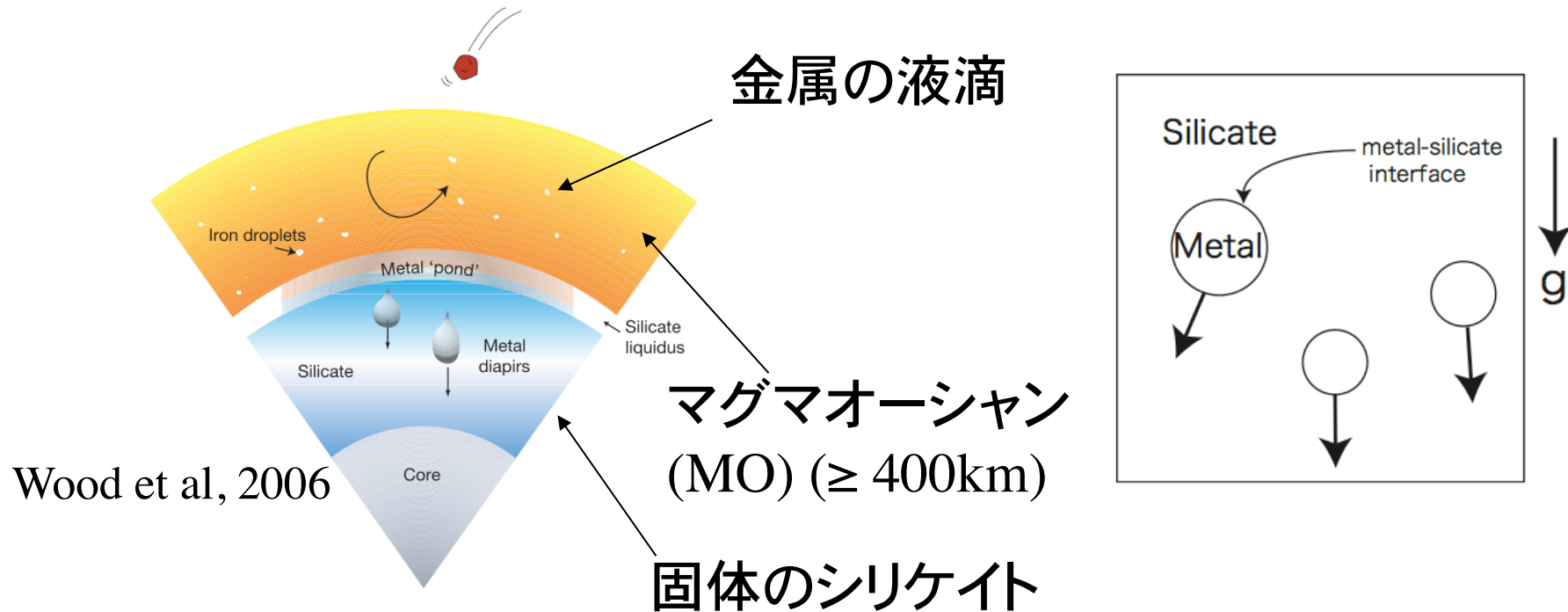


Fig. 1. Thermal evolution of 'standard' earth growing by planetesimal impact: $\theta = 4$, $m_1/M = 1/500$, $q = 1.8$, $h = 0.1333$, and $\nu_H = \nu_i = 0.10$, and other parameter values as specified in Tables 1 and 2.

Kaula, 1979

コアの形成過程 (マグマオーシャン)



マグマオーシャンでは、鉄とシリケイトが溶融している。

鉄は**表面張力**により、1cm程度の液滴を形成する。

マグマオーシャン中を液滴が下降していく → **iron rain**

▶ この過程で**熱**や**元素**もコア・マントルに分配される

化学元素の分配

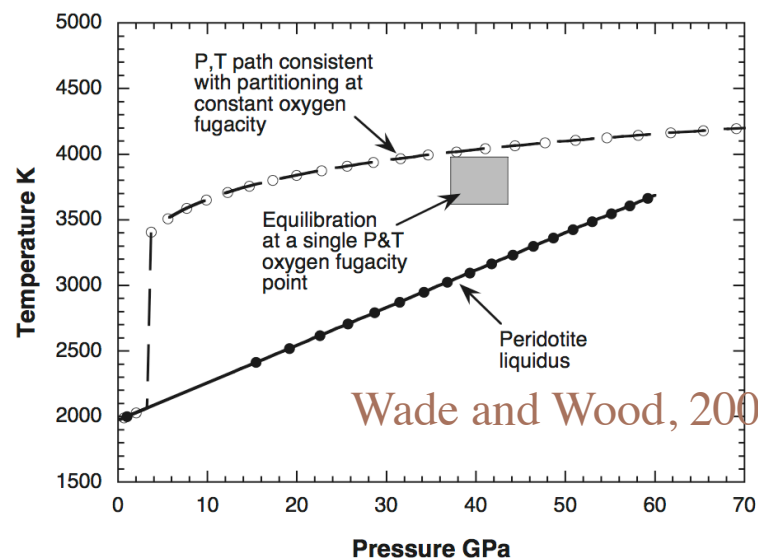
マグマオーシャンの底で金属とシリケイトは平衡状態にあった。



Single Stage model を仮定すると、Ni, Co, V, Cr, Mn, Nb 等が、マントル・コア間で化学平衡になったであろう P-T条件 (マントルは一樣と仮定) と、マグマオーシャンの底の P-T条件は食い違う

Core formation conditions estimated from metal-silicate partitioning

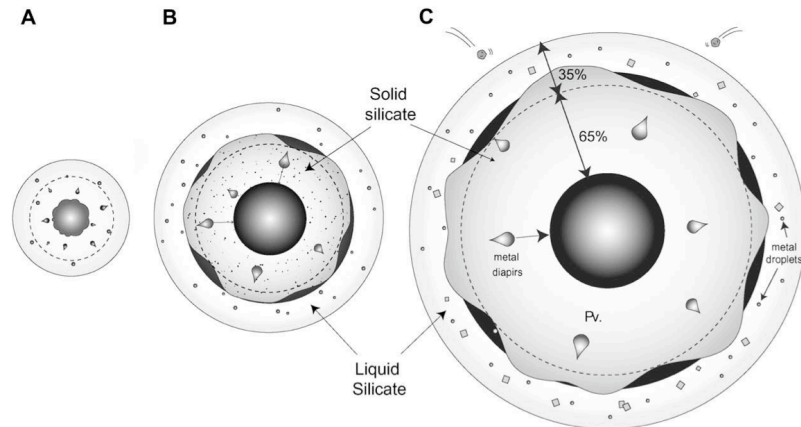
(マグマオーシャンの底の
温度 = シリケイトの融点)



金属とシリケイトが、平衡状態になったP-T条件はシリケイトの融点よりも大分温度が高いことが示唆

矛盾を解決できるモデル

(1) 酸素フガシティを時間変化させながら、大きくなっていく



Wade and Wood 2005, Wood et al., 2009 らのモデル

(2) Single stage modelでも金属相に酸素を2~5wt%入れると説明できる。Corgne et al., 2009

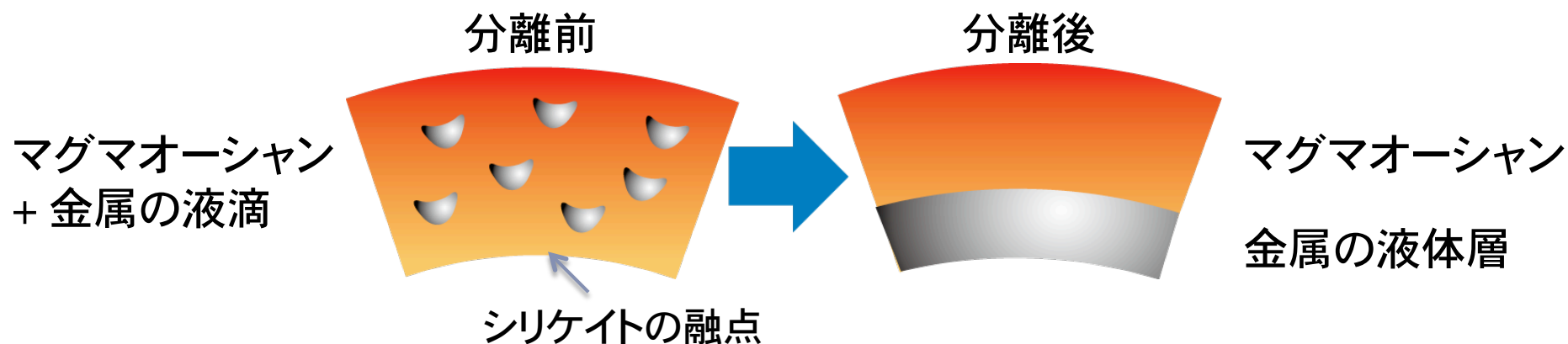
これらのモデルはマグマオーシャンの底で化学平衡になるとしている。

▶ そもそもマグマオーシャンの底で化学平衡になるか??

分離過程での温度

液体のシリケイトと金属が接しているところで化学平衡状態に落ち着く。

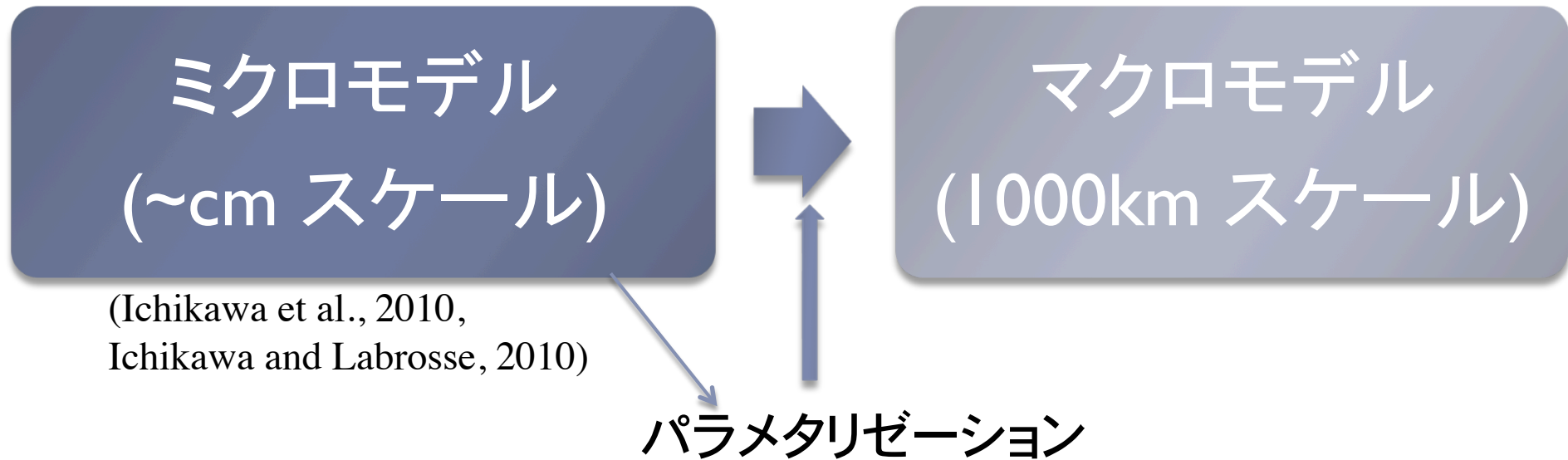
化学平衡状態は液体と液体が接しているところ、
特に、液滴の状態が生じる (Rubie et al., 2003)



▶ 分離過程での温度場を計算しないと化学平衡が計算できない。

計算のアウトライン

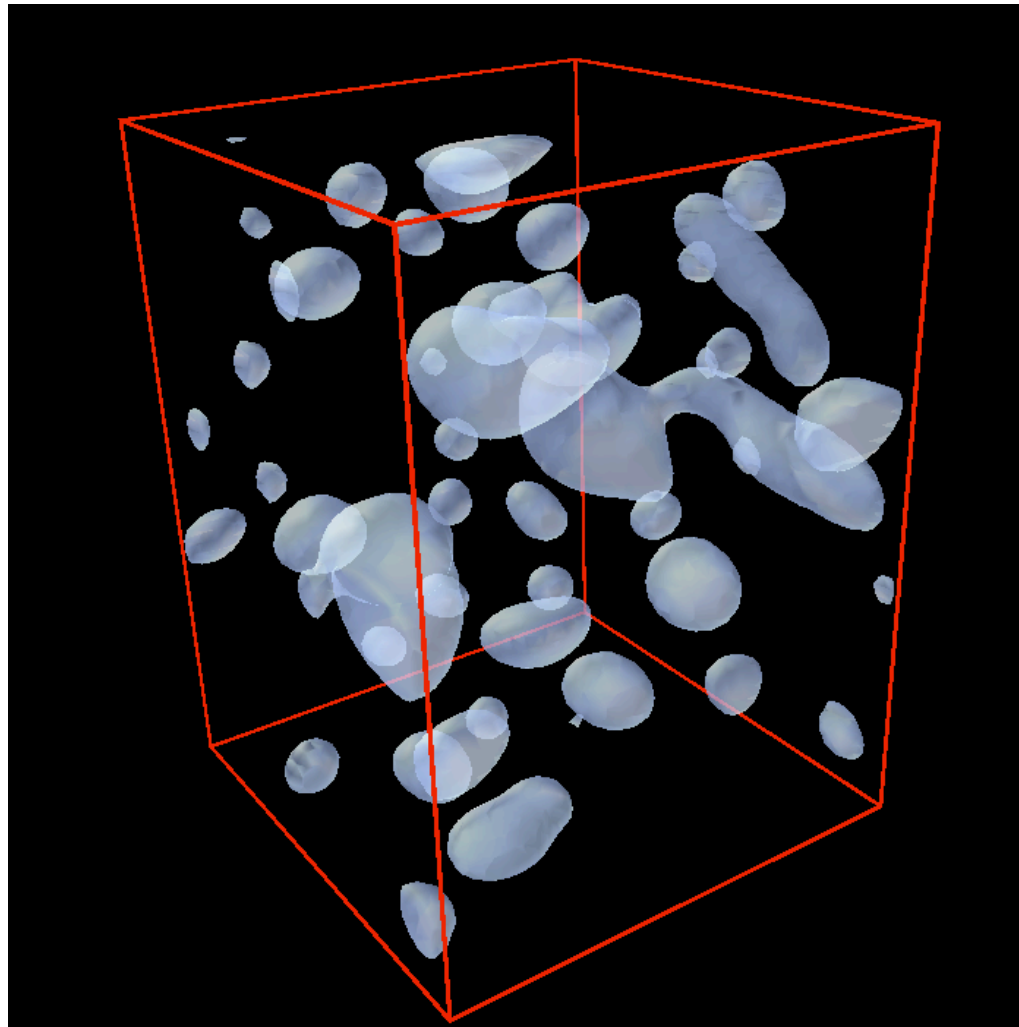
1cmの液滴を全球規模の数値モデルで計算するのは不可能



- 1) ミクロモデルはフルの流体計算で行う
- 2) ミクロモデルから金属の液滴の速度をパラメータ化する
- 3) 求めたパラメタリゼーションをマクロモデルに導入

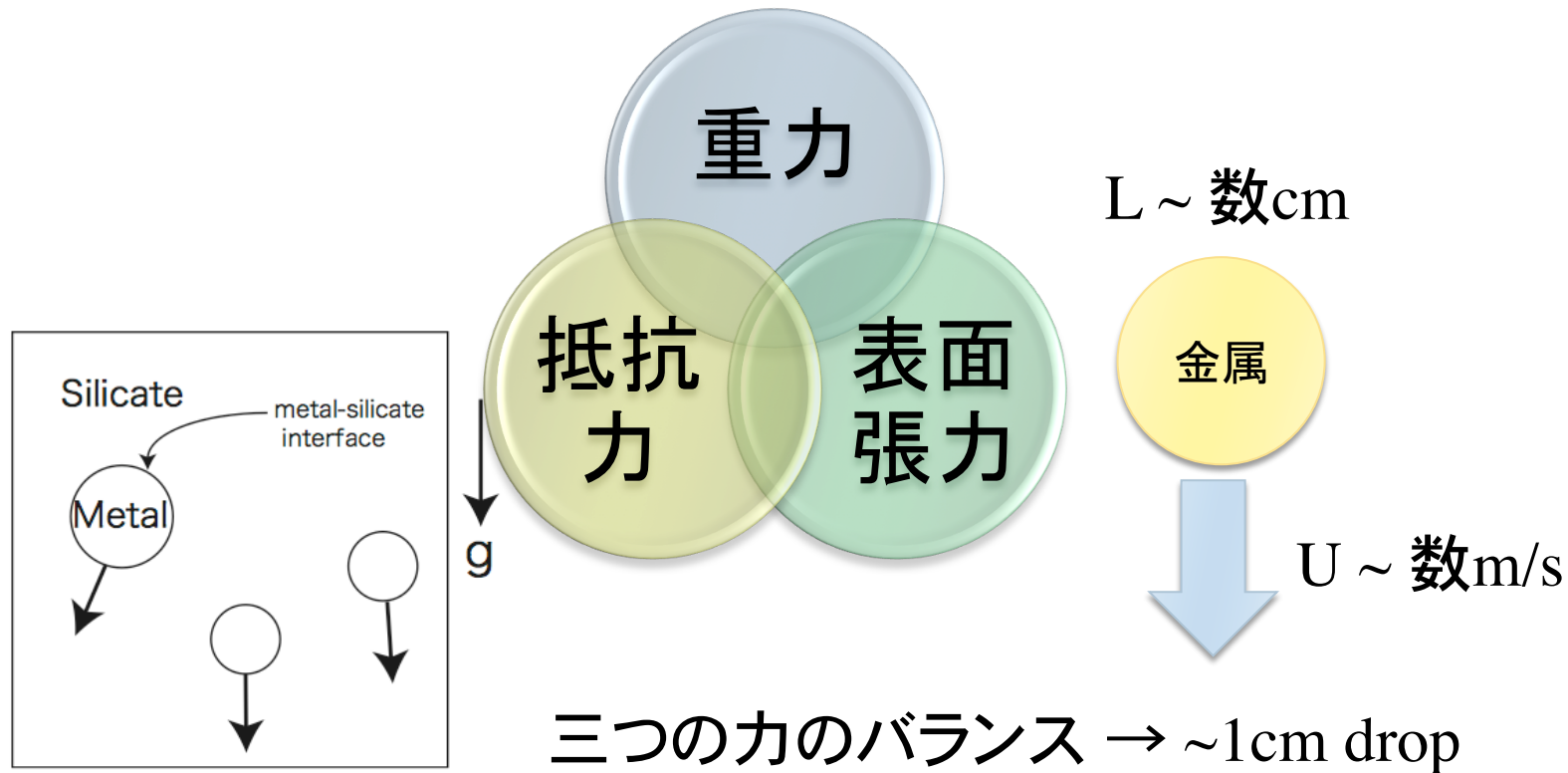
惑星規模の熱構造、化学分配

マイクロモデルの計算



液滴に働く三つの力

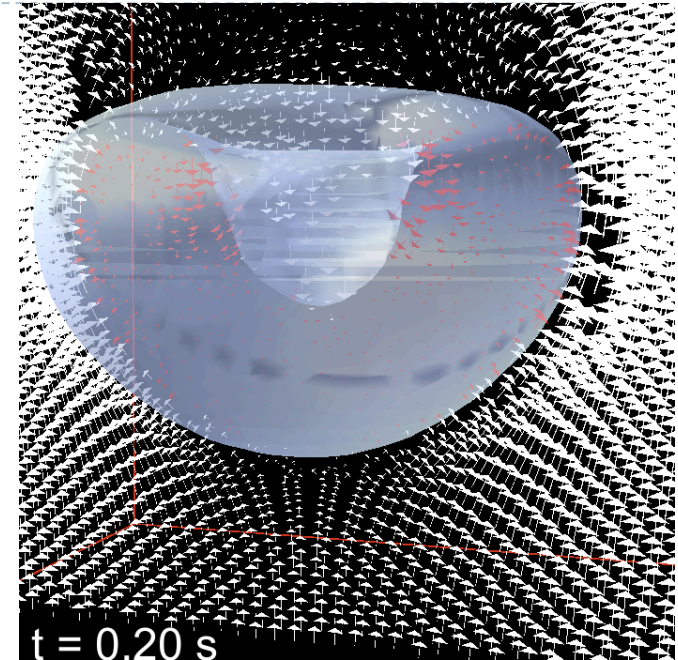
Rubie et al., 2003 の次元解析 (inspired by Stevenson, 1990)
液滴のサイズは1cmくらいのオーダー



- ▶ 定常的なサイズ分布に達するか? どの程度の時間で?

液滴のサイズ分布、流れの様子 の数値計算

- ◆ 表面張力 \geq 抵抗力 = 重力
→ 1cmより小さいサイズのものが
できてもよい
- ◆ 液滴の形の効果



衝突や合体過程も取り入れた数値計算を行う。



方程式系

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \text{ or } \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

表面張力

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \{\eta\nabla\vec{u} + \eta(\nabla\vec{u})^T\} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\sigma\hat{n}(\nabla_{\Sigma} \cdot \hat{n})\delta_{\Sigma}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\rho C_p}\nabla \cdot (k\nabla T) + \frac{1}{\rho C_p}\Phi \quad \rho = (\rho_s \text{ or } \rho_m) \times (1 - \alpha(T - T_0))$$

$$\Phi = \tau : \nabla\vec{u} = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

パラメータの値。

$$\rho_s = 3750 \text{ kg/m}^3 \quad \eta_s = 0.01 \sim 10 \text{ Pa s} \quad k_m = 7.8 \text{ W/(K}\cdot\text{m)}$$

$$\rho_m = 7800 \text{ kg/m}^3 \quad \eta_m = 0.01 \sim 10 \text{ Pa s} \quad k_s = 3.75 \text{ W/(K}\cdot\text{m)}$$

$$\alpha = 6 \times 10^{-5} \quad c_p = 10^3 \text{ 1/K} \quad g = 10 \text{ m/s}^2 \quad \sigma = 1 \text{ N/m}$$

▶ s : silicate m : metal

無次元数

(m: metal, s: silicate)

力学的に重要

- モルトン数：

$$M = \frac{\eta_s^4 (\rho_m - \rho_s) g}{\sigma^3 \rho_s^2}$$

- 粘性比： η_m / η_s

- 密度比： ρ_m / ρ_s

- 金属の体積比： f

力学的には重要でない

- 熱伝導率の比： k_m / k_s

- プラントル数： ν_s / κ_s

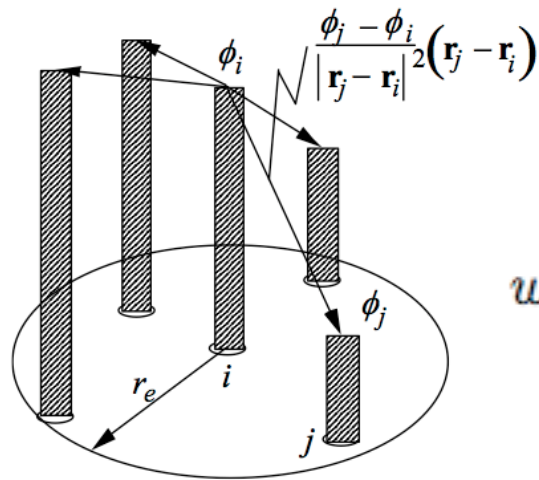
本研究では、 η_m 、 η_s 、 f を変化させた。

発表では粘性率のみを変化。 $\eta_m / \eta_s = 1$, $f = 5.76 \%$

数値計算法 (MPS法)

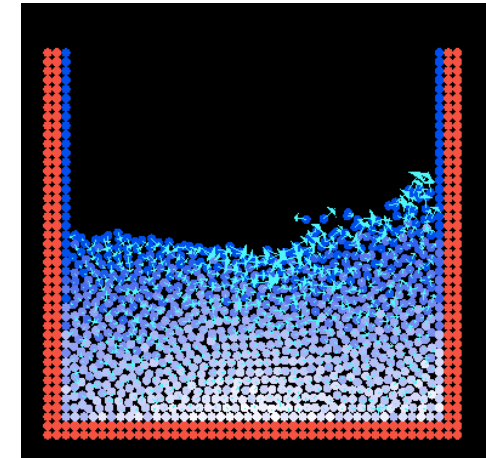
(Moving-Particle Semi-implicit) Koshizuka and Oka, 1996

微分演算子は重み関数を用いて離散される。



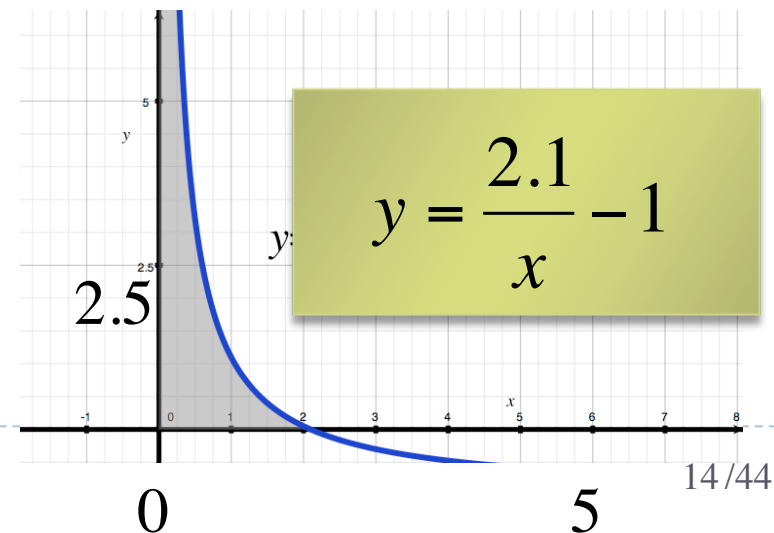
Weight function

$$w(r) = \begin{cases} \frac{r_e}{r} - 1 & (0 \leq r \leq r_e) \\ 0 & (r_e \leq r) \end{cases}$$



Koshizuka, 2002

ポアソン方程式を解くことにより、
非圧縮性を確保



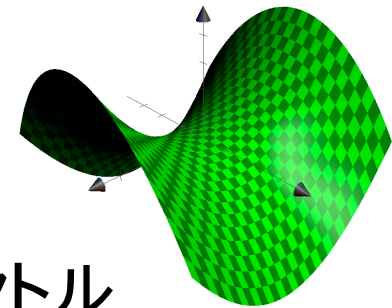
3-Dでの表面張力の計算の仕方

単位体積あたりの表面張力

$$-\frac{1}{\rho}\sigma\hat{n}(\nabla_{\Sigma}\cdot\hat{n})\delta_{\Sigma}$$

\hat{n} : 界面の法線ベクトル

$$\hat{n} = \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} \quad \theta = \begin{cases} 0 & \text{at fluid component 0} \\ 1 & \text{at fluid component 1} \end{cases}$$



● 法線ベクトル → SPHの微分モデルで。

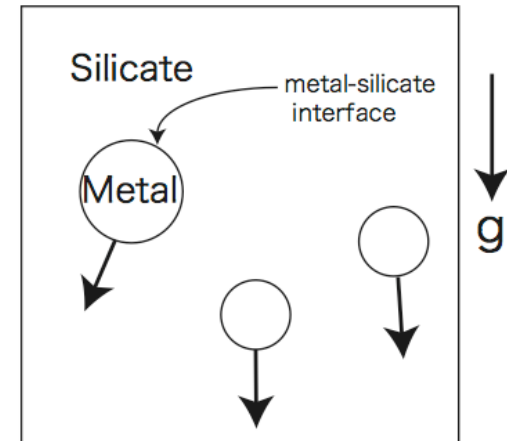
● 平均曲率 → MPS法の微分モデルで。

$$\nabla_{\Sigma}\cdot n$$

Ichikawa and Labrosse 2010

マイクロモデル計算の目的

→ 液滴のサイズや速度をきちんと調べ、
流れの形態や熱エネルギーの分配も調べる



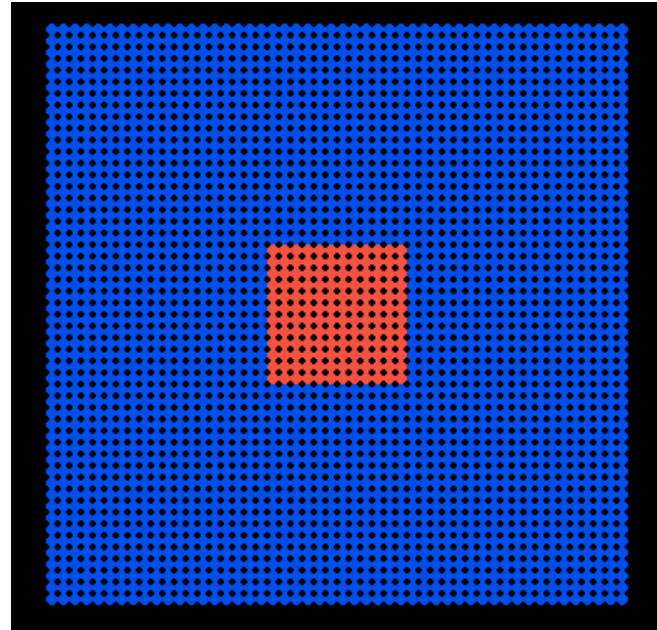
2D シミュレーション (Nomura et al., 2001の表面張力モデル)

▶ 3D シミュレーション (Ichikawa et al., 2010の表面張力モデル)

計算設定

周期境界

重力



赤:金属

青:シリケート

10cm × 10cm

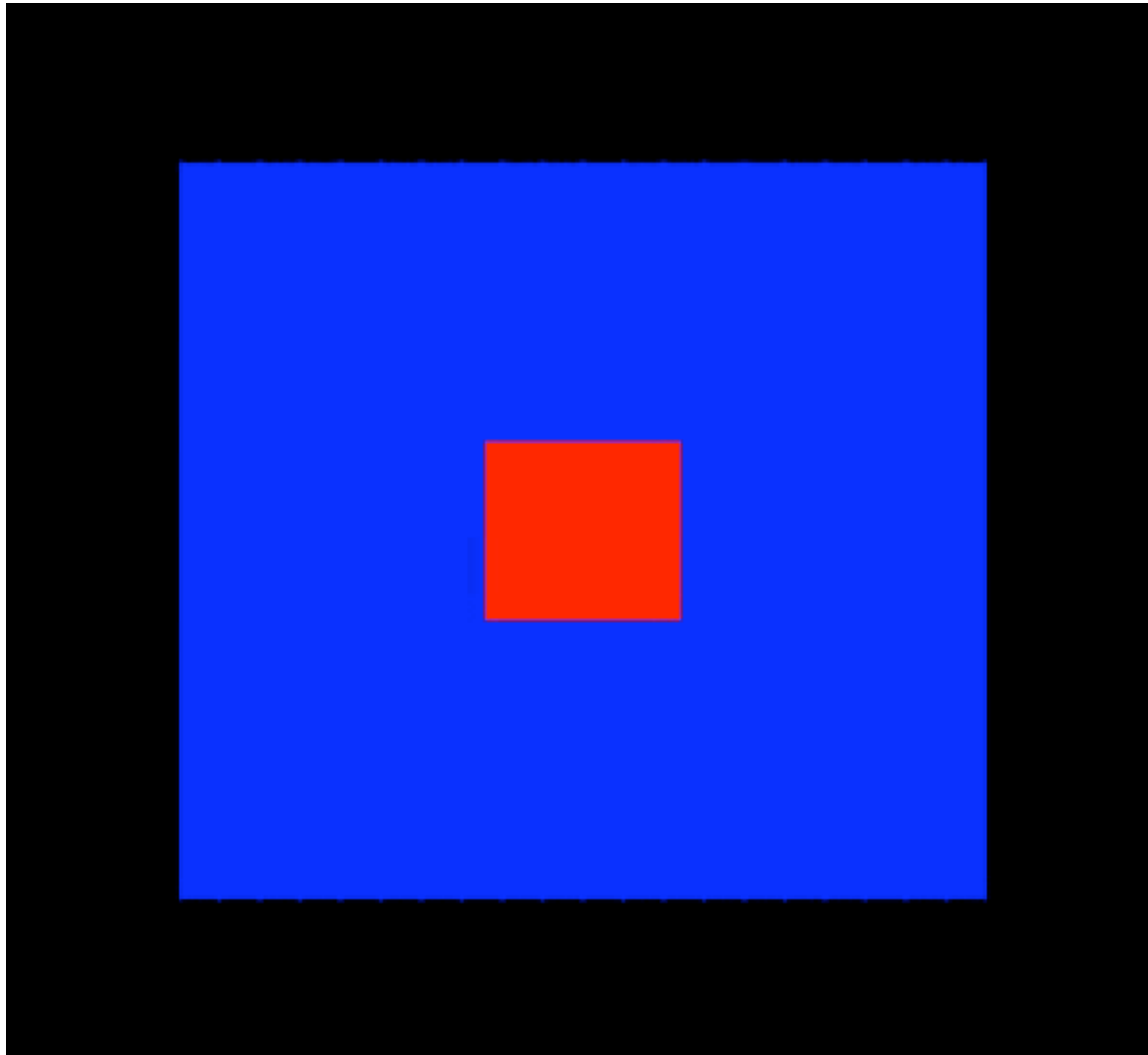
実際の計算では 40,000 以上の計算粒子を使用

以下のスライドでは粘性が1 Pa sを例として紹介

2Dの計算(Nomura et al., 2001を使用)をいろいろなパラメータで実行

▶ 3Dは1 Pa sの計算だけ。

2Dの計算



実時間で10秒
1/2倍速

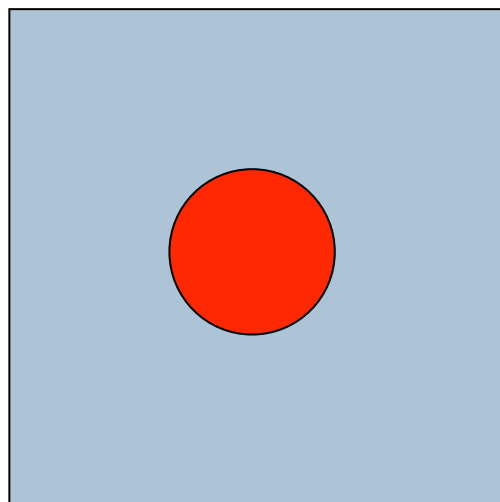
分裂のタイムスケールは小さい

赤色が金属

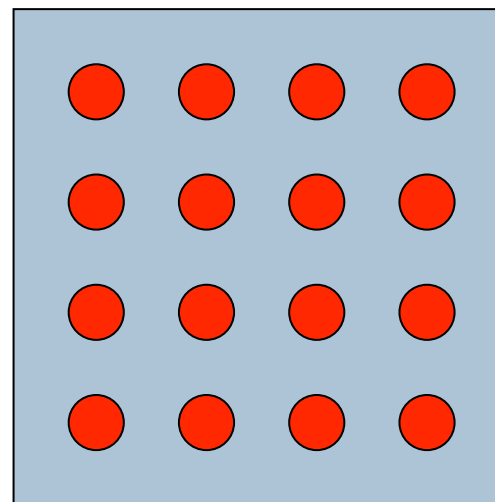
▶ いたる所で分裂、合体がおこる。液滴同士の相互作用が大きい

初期サイズの影響の検証

初期サイズの異なる二つの初期値



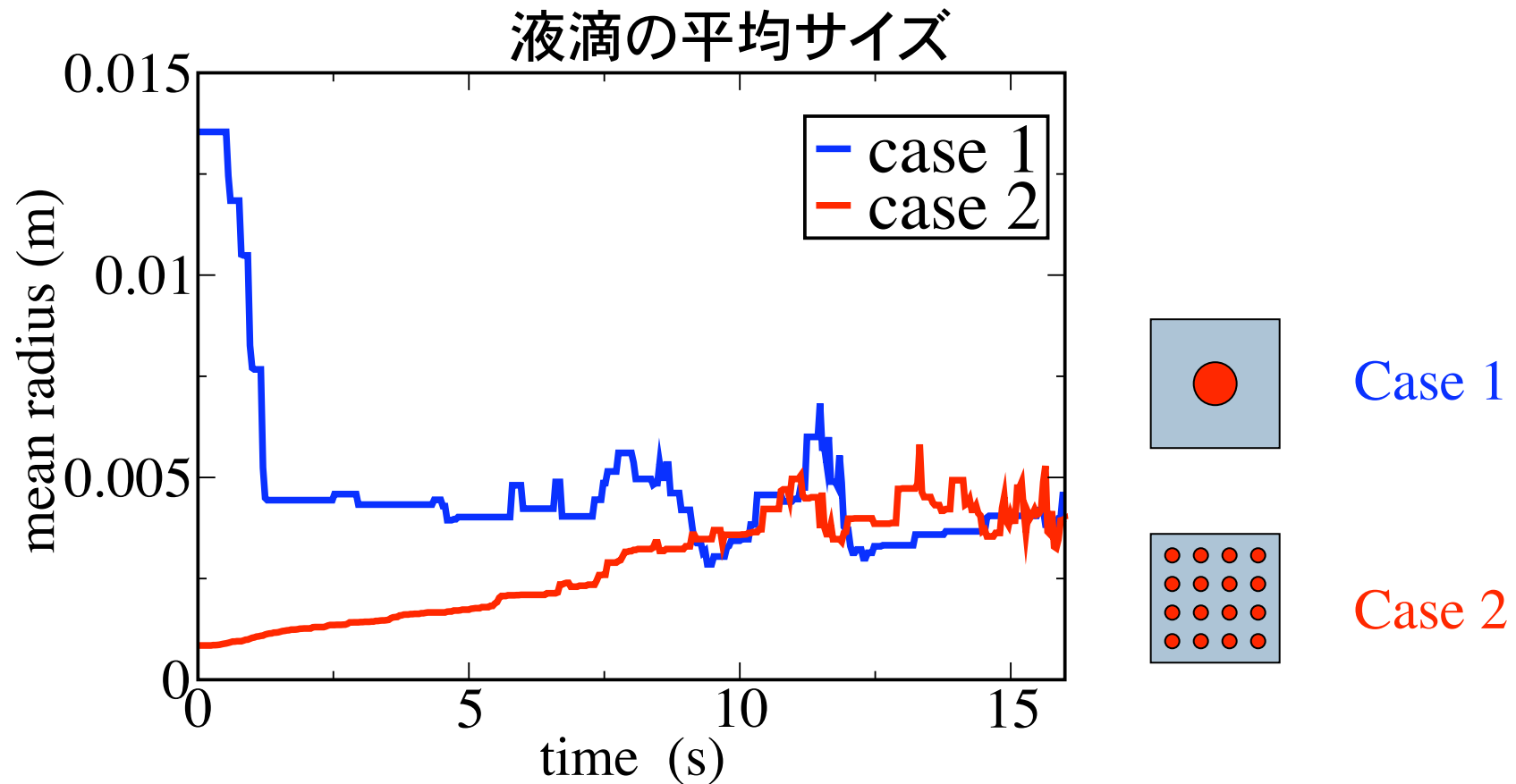
case 1



case 2 (256 個)

液滴(金属)とシリケイトの体積比は同じ

液滴の平均サイズ

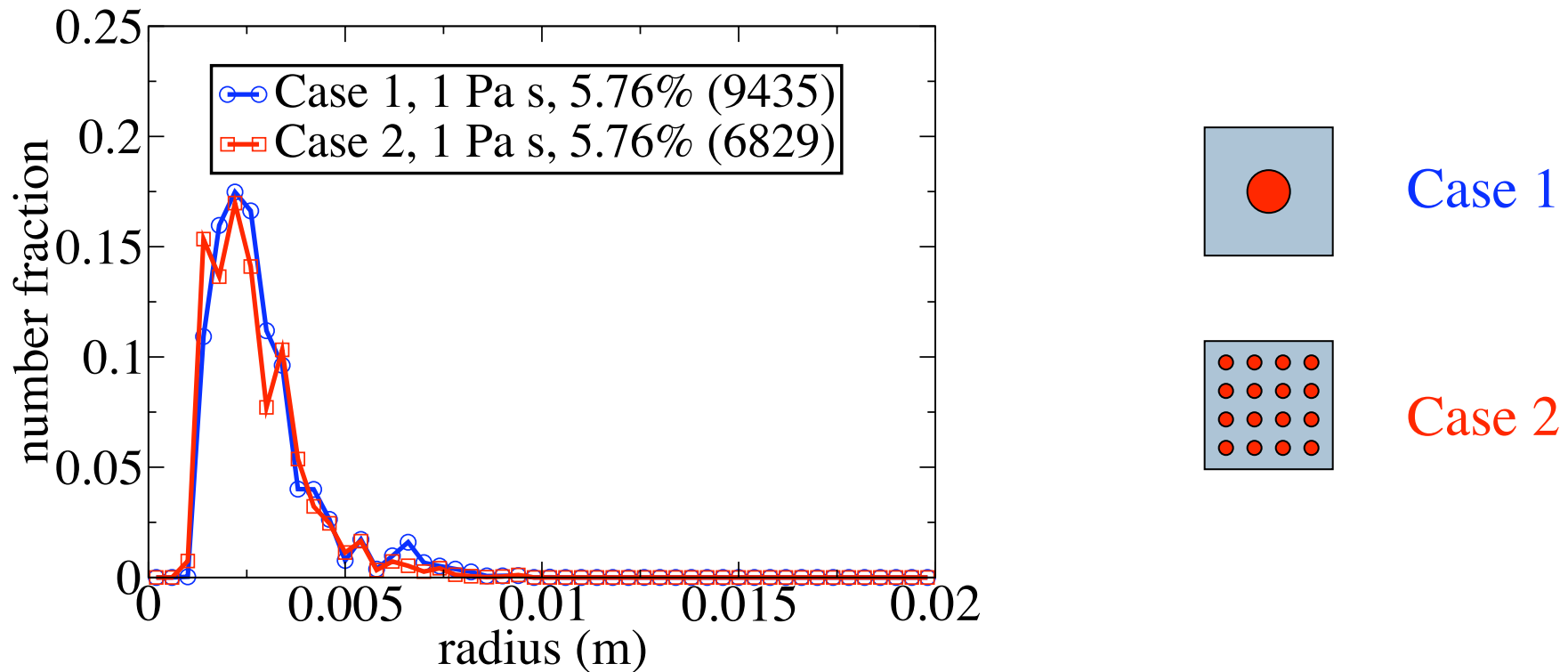


平均サイズ ~ 4mm (Rubie et al., 2003~0.5cm)

▶ 10秒後ぐらいには同じ定常状態になっている。

液滴のサイズ分布

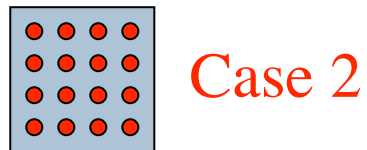
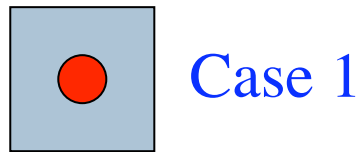
定常状態における液滴のサイズ分布



- ◆ 液滴のサイズ分布も同じ
- ◆ 液滴のサイズには下限 (case 2の初期サイズより大きい) が存在する。
→ 小さい液滴は生成されない。

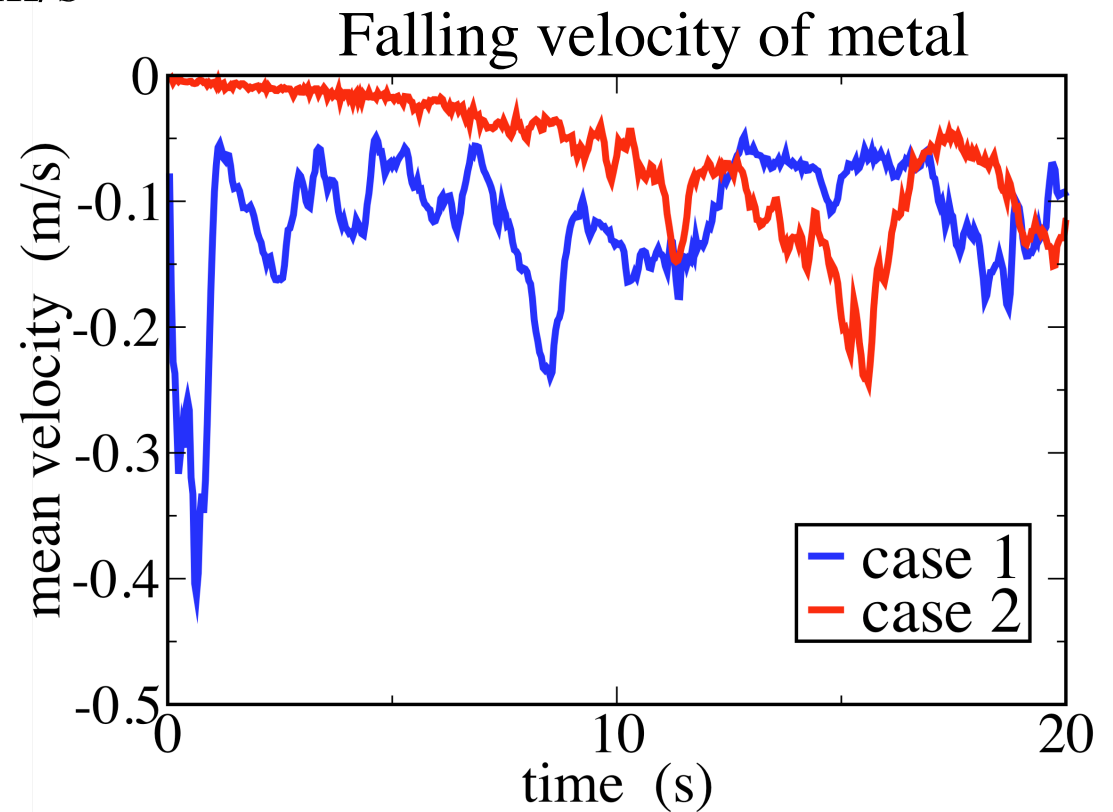
液滴の速度

平均速度 (metal) : ~ 0.15 m/s



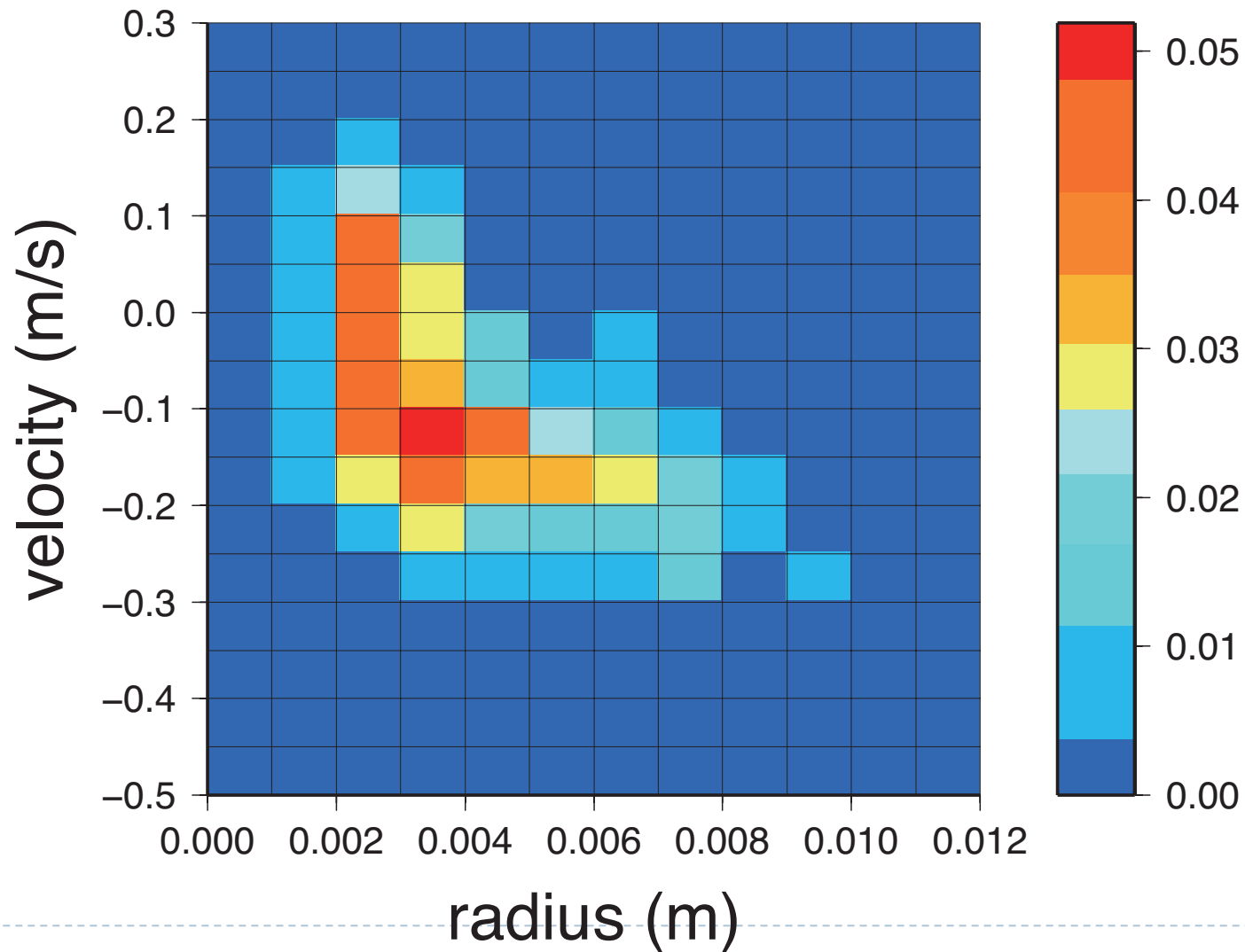
Rubie et al., 2003

$V \sim 0.5$ m/s



Rubie et al., 2003と同じくらいの速度

サイズ・速度分布

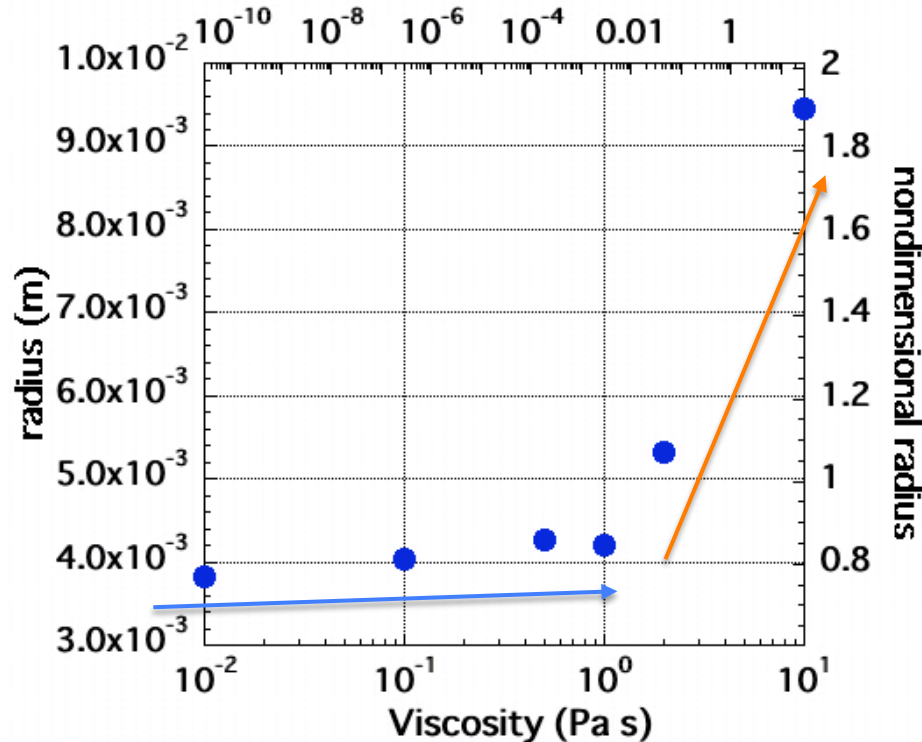


粘性の効果 (2D)

半径

Volume fraction = 5.76%

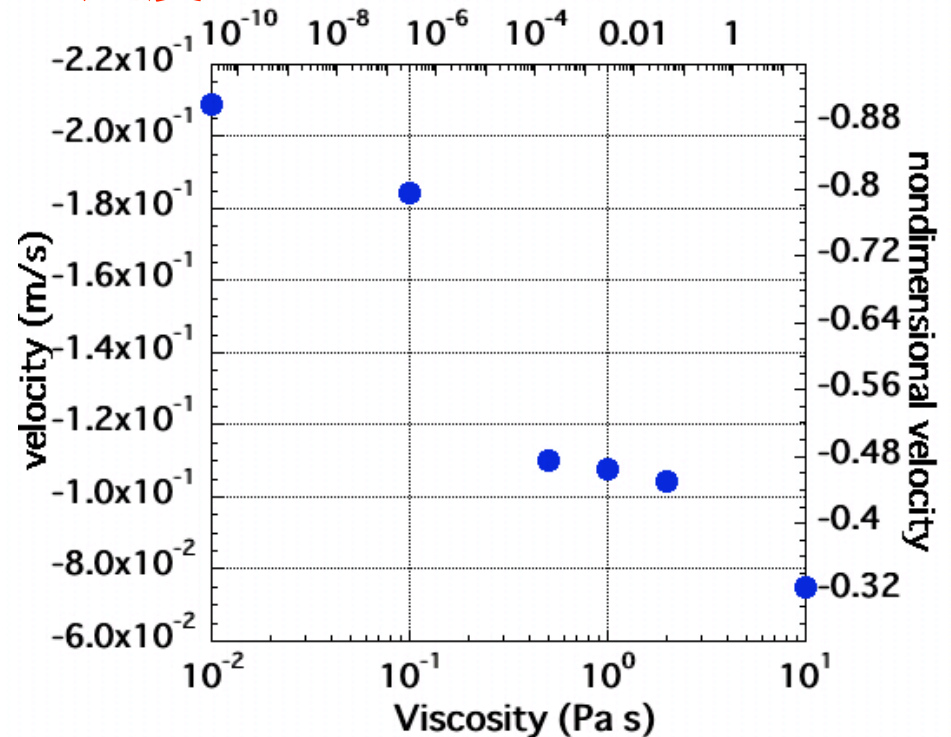
Morton number



速度

Volume fraction = 5.76%

Morton number

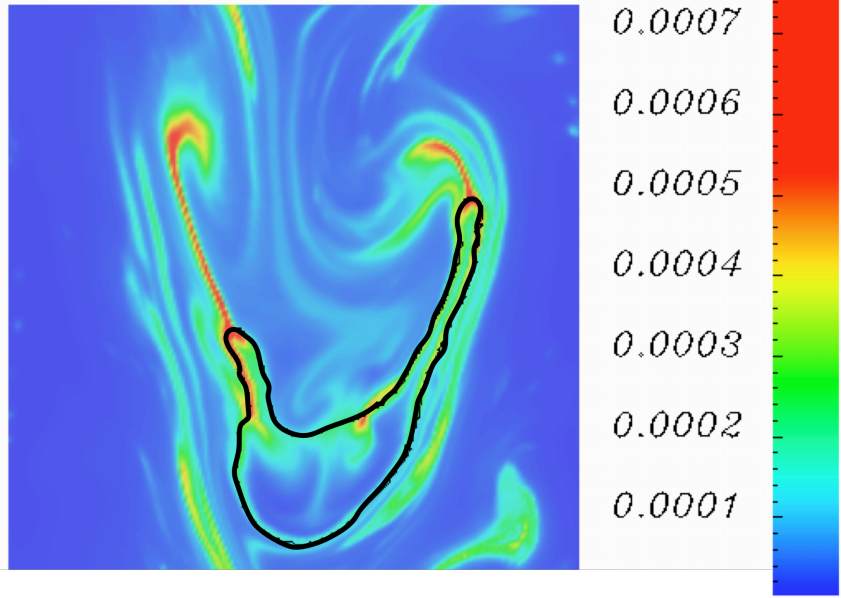


$\eta \gg 1 \text{ Pa s}$, 粘性が支配的

$\eta \ll 1 \text{ Pa s}$, 慣性力が支配的

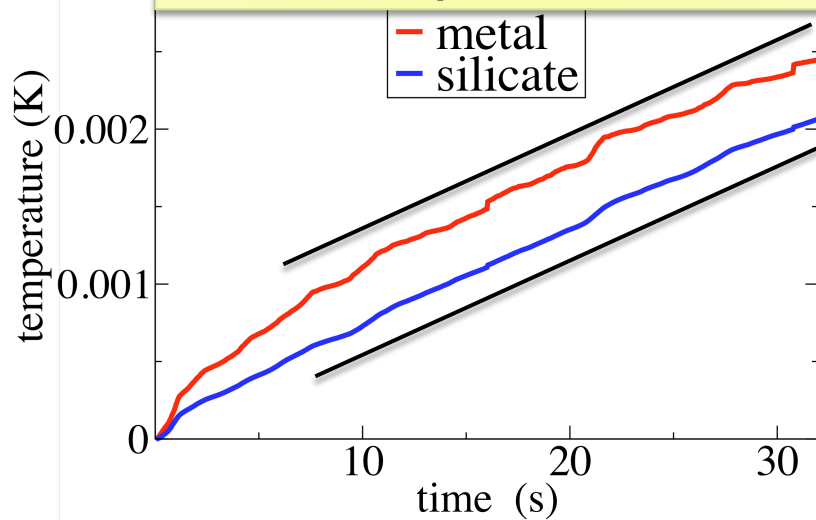
$$Re = \frac{2\bar{r}\bar{w}\rho_s}{\eta_s} = 3.41 \quad \text{at } \eta = 1 \text{ Pa s.}$$

温度場



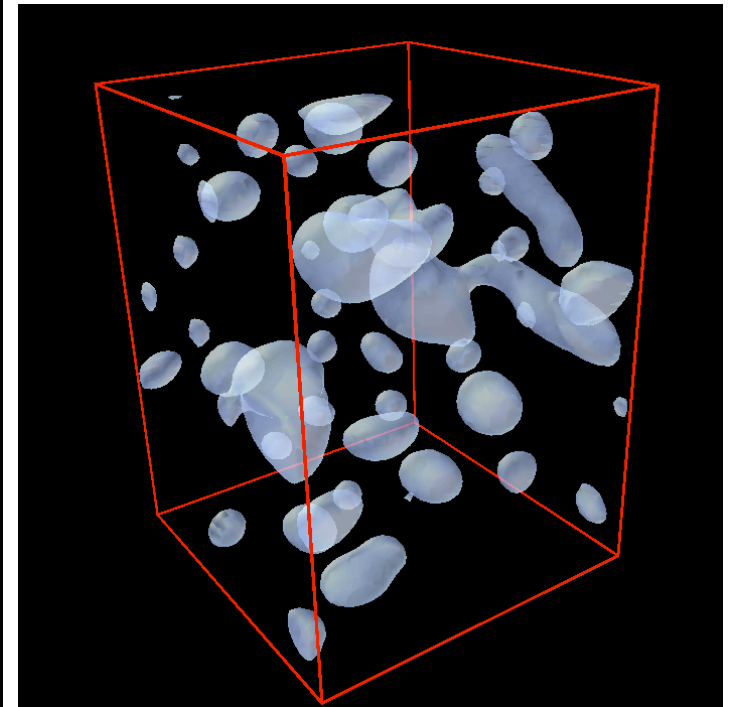
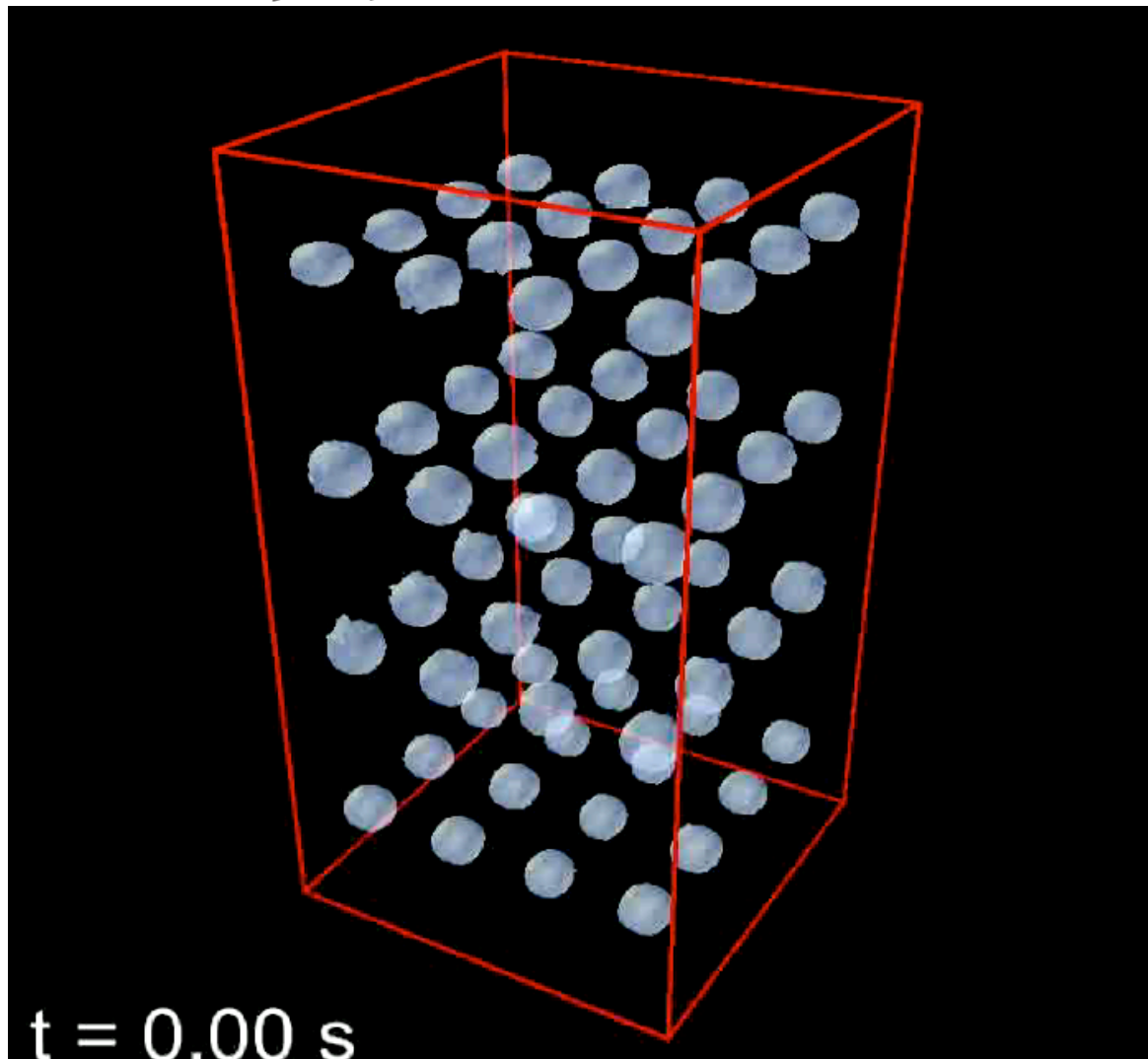
熱は相境界でおもに発生している。

Mean temperature of each phase



The temperature difference is constant due to advection

三次元



- ▶ $6\text{cm} \times 6\text{cm} \times 12\text{cm}$ の領域、約24万粒子

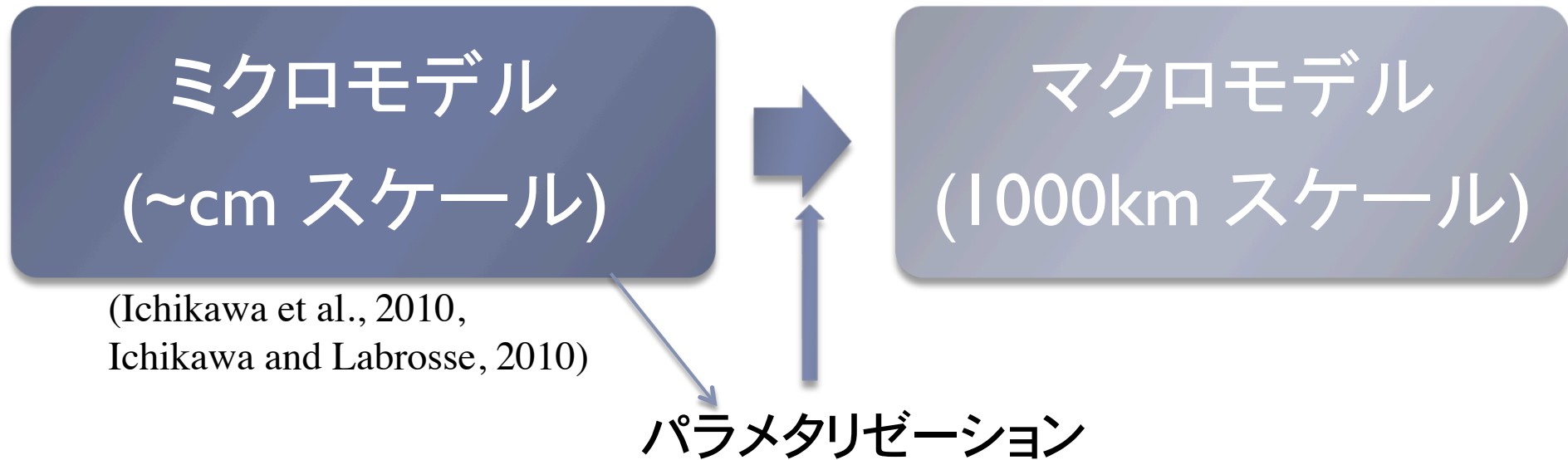
ミクロモデル計算のまとめ

- 衝突や分離の結果1cm程度の液滴を速やかに形成。
(Rubie et al., 2003の結果と同じくらい)
- 定常状態は初期サイズによらない。定常状態には即座に落ち着く → 定常状態の量だけ知っていればよい。
- 定常状態での液滴の最小サイズの存在。
→ マグマオーシャン中では金属はシリケイトから、ほぼ完全に分離する。



計算のアウトライン

1cmの液滴を全球規模の数値モデルで計算するのは不可能

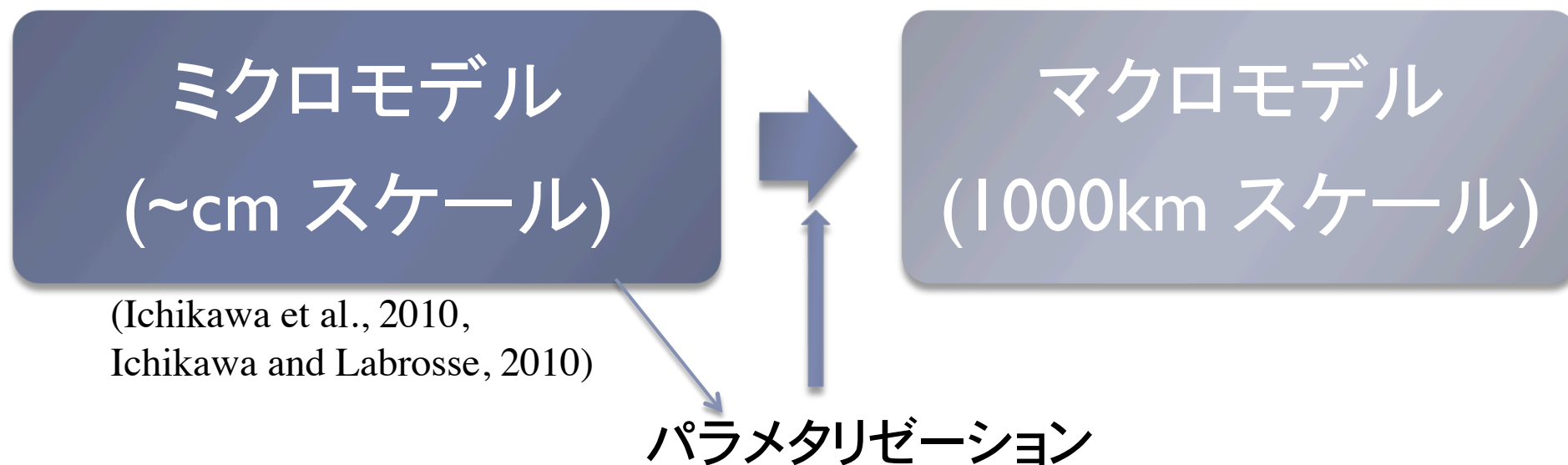


- 1) ミクロモデルはフルの流体計算で行う
- 2) ミクロモデルから金属の液滴の速度をパラメータ化する
- 3) 求めたパラメタリゼーションをマクロモデルに導入

惑星規模の熱構造、化学分配

計算のアウトライン

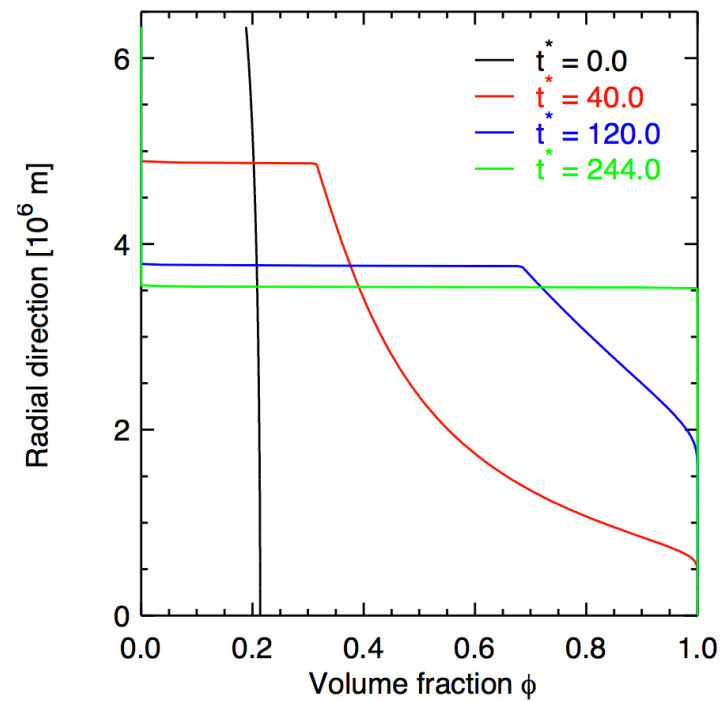
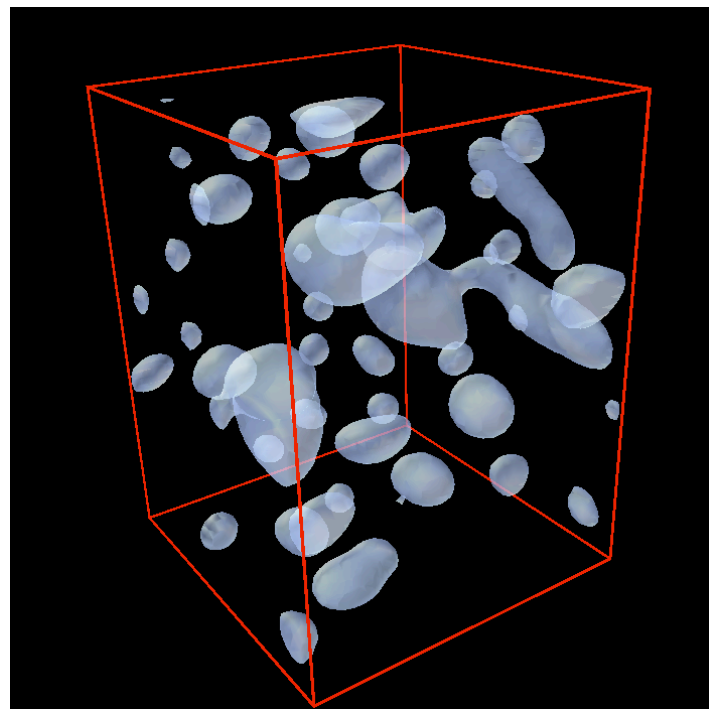
1cmの液滴を全球規模の数値モデルで計算するのは不可能



- 1) ミクロモデルはフルの流体計算で行う
- 2) ミクロモデルから金属の液滴の速度をパラメータ化する
- 3) 求めたパラメタリゼーションをマクロモデルに導入

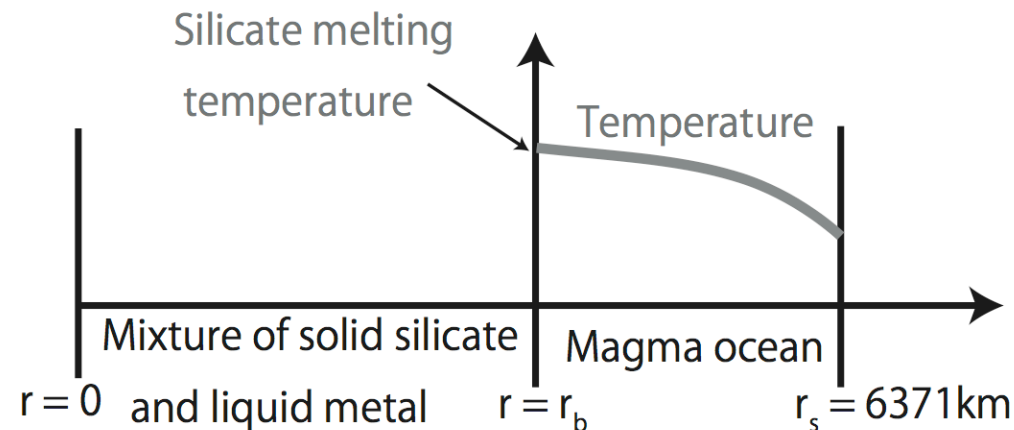
惑星規模の熱構造、化学分配

マグマオーシャンのマクロモデル



1D マクロモデル (問題設定)

初期条件



各タイムステップごとに解いている式(球対称の差分式)

- ▶ 質量保存の式 ← 物質の流れを計算
- ▶ 運動量保存 → パラメータ化 + 静水圧平衡
- ▶ エネルギー保存の式 ← 温度を計算
- ▶ 元素の移流方程式 ← 各元素の移動を計算
- ▶ メタルとシリケートの状態方程式 ← 密度の計算
- ▶ 重力の式 ← 地球の圧縮性を考慮(各グリッドを縮める)

▶ 差分法で計算

運動方程式のパラメータ化

1. ミクロ計算を様々なパラメータで繰り返し行う。
2. その結果から、簡略化された運動方程式

$$u_m = f_1(\phi_m) f_2(g, \eta, \rho)$$

を導く(球対称一次元モデル)。

u_m : 金属の鉛直方向速度

ϕ_m : 金属の体積分率

f_1 : ミクロモデルの結果から推定した関数

f_2 : 次元解析から推定した関数

g : 重力加速度

η : 粘性率

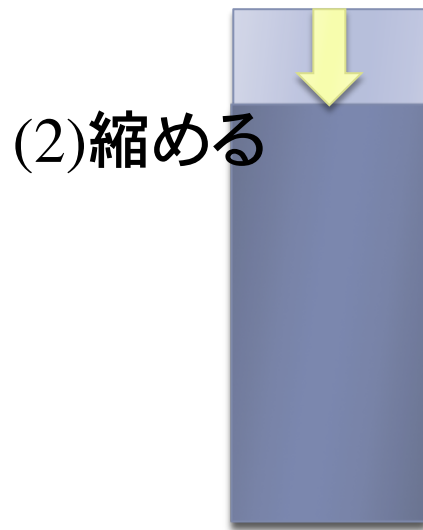
ρ : 密度

時間発展

一タイムステップごとに下記の計算を行う

(1)物質移動
$$\frac{\partial(\rho_m r^2 \phi)}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho_m u_m r^2 \phi)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial(\rho_s r^2 (1 - \phi))}{\partial t} = - \frac{\partial(\rho_s u_s r^2 (1 - \phi))}{\partial r}$$



$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho g,$$

$$g(r) = G \frac{GM(r)}{r^2}$$

$$\rho_x = \rho_{r,x} \left(\frac{K_{0,x} + K'_{0,x}(p - p_{r,x})}{K_{0,x}} \right)^{1/K'_{0,x}}$$

各セル内の質量を保存させながら
収束するまで繰り返し

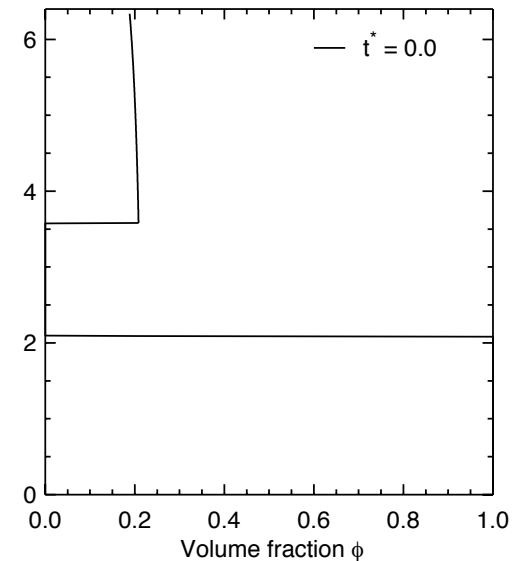
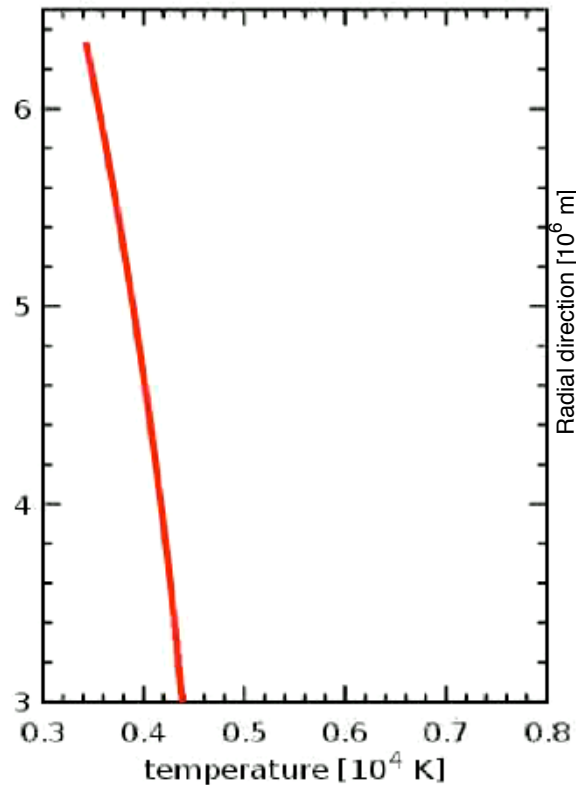
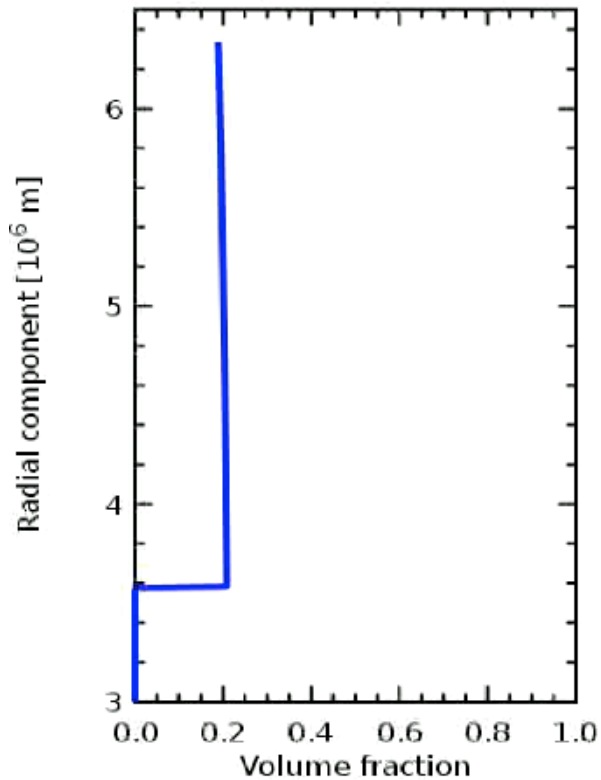
状態方程式

1Dマクロモデルのアニメーション

~2000kmの深さのマグマオーシャンの場合 1 dimensionless timeが約11.6日

鉄の体積分率
温度(10^4 K)

Dimensionless time = 0.0



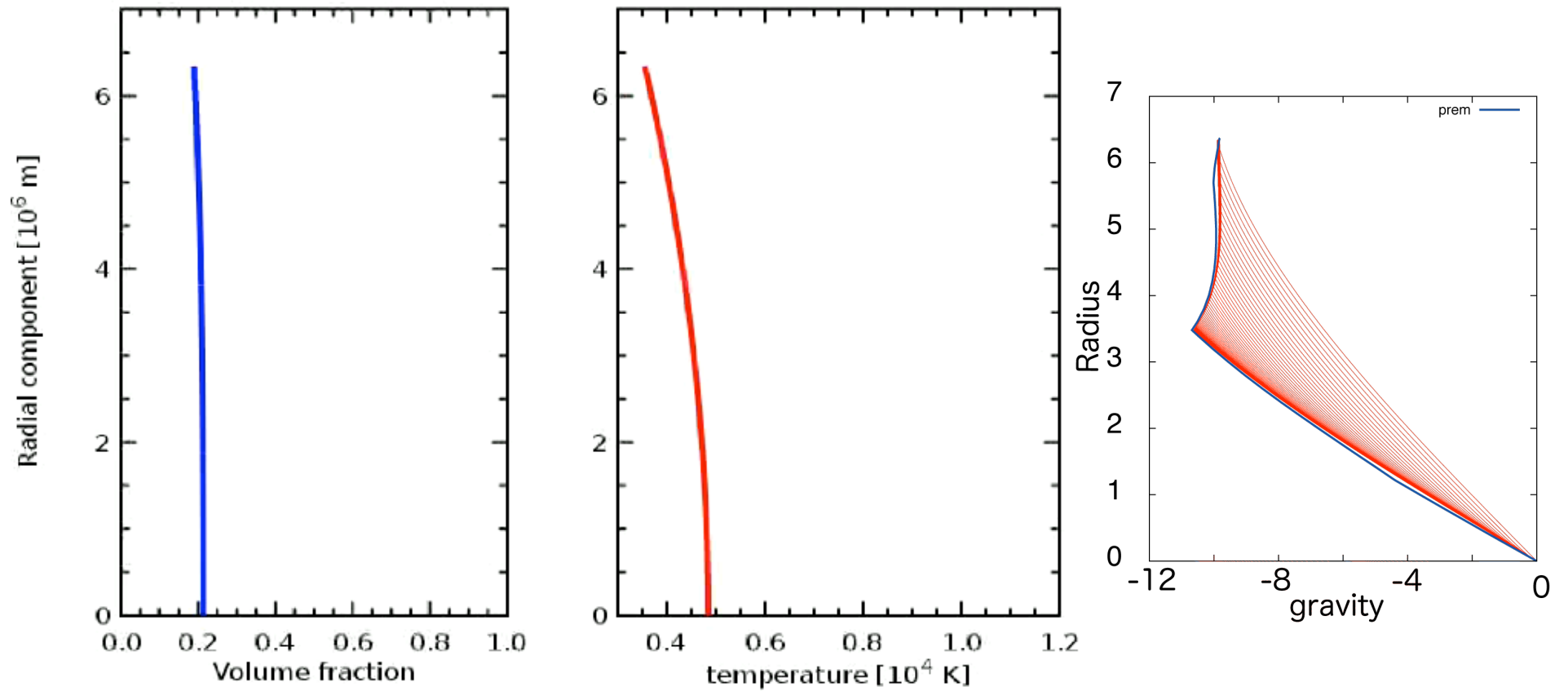
初期の ϕ 分布

分離後のシリケイトと金属の境目の温度が非常に高い

- ▶ シリケイトの融点よりも遙かに高温で化学平衡

全球が解けた場合

Dimensionless time = 0.0



化学平衡の計算

メタルとシリケートの分配 $\rightarrow \log D_i = a + \frac{b}{T} + c \frac{P}{T} + d(nbo/t) - \frac{v}{2} \log \left(\frac{X_{FeO}^{silicate}}{X_{Fe}^{metal}} \right) - \log \frac{(\gamma_i^{metal})}{(\gamma_{Fe}^{metal})^{v/2}}$

- ▶ Ni, Co, V, Cr, Mn: Chabot and Agee, 2003, Chabot et al., 2005
- ▶ Ni, Co, V, Cr, Mn, Nb: Wood et al., 2008, Wade and Wood, 2005
- ▶ Ni, Cr, Mn, Nb: Corgne et al., 2008

金属中の軽元素(O,S,C,Si)の効果。

問題点

- ▶ 実験結果によって、かなり結果が食い違う。
- ▶ 高温、高圧への外挿は誤差がかなり多い

▶ MOでの代表的なP-T条件をとりあえず計算してみる

Effective P-T 条件の例 1

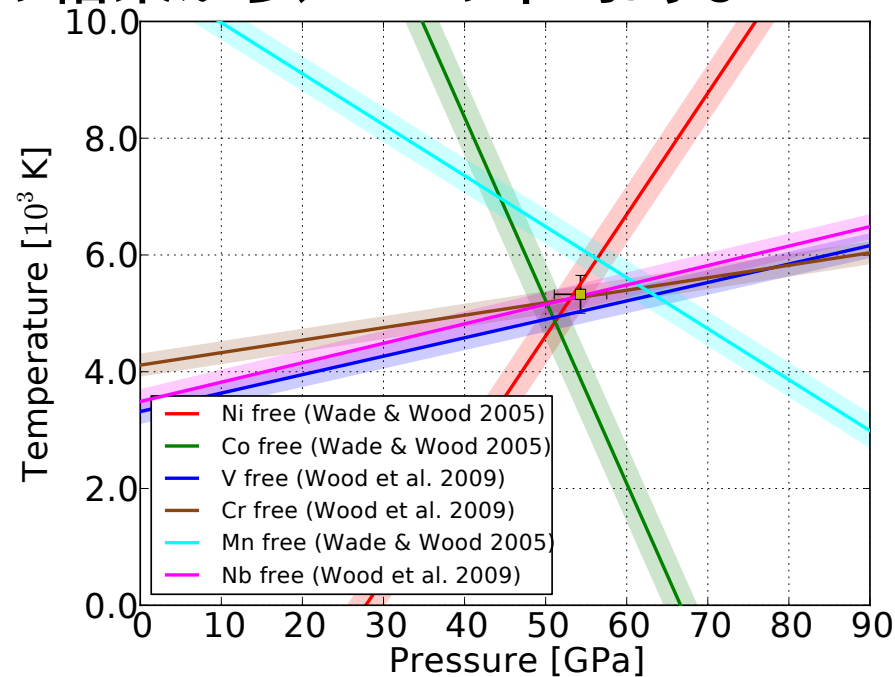
深さの2800kmのMOの計算結果。

$$\log D_i = a + \frac{b}{T} + c \frac{P}{T} + d(nbo/t) - \frac{v}{2} \log \left(\frac{X_{\text{FeO}}^{\text{silicate}}}{X_{\text{Fe}}^{\text{metal}}} \right) - \log \frac{(\gamma_i^{\text{metal}})}{(\gamma_{\text{Fe}}^{\text{metal}})^{v/2}}$$

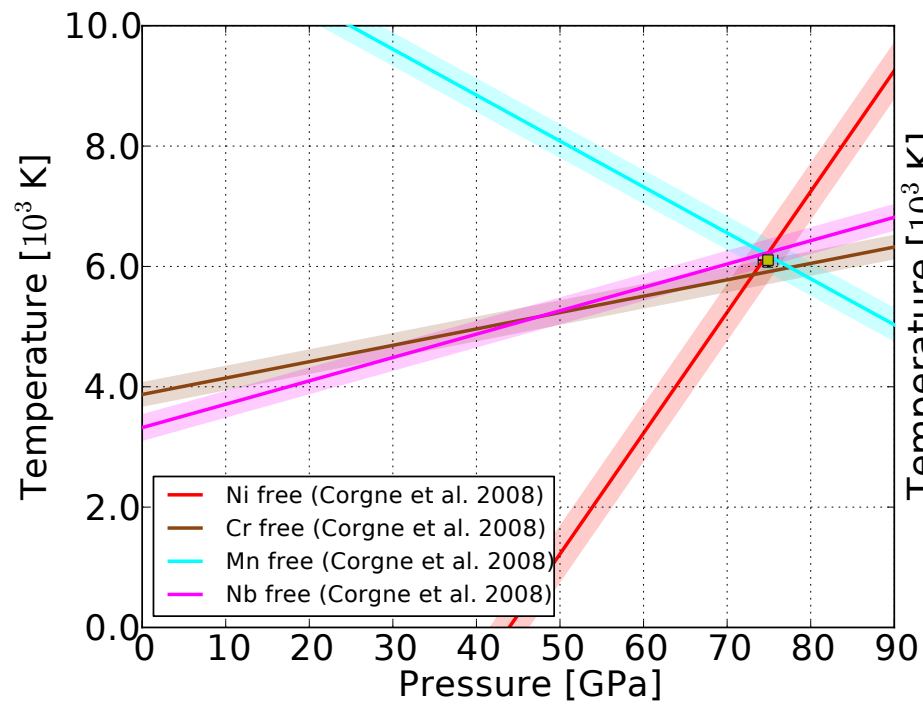
各元素の局所的な分配の結果から、MOの平均的なP-T条件を見積もった。

MOの底のP-T条件

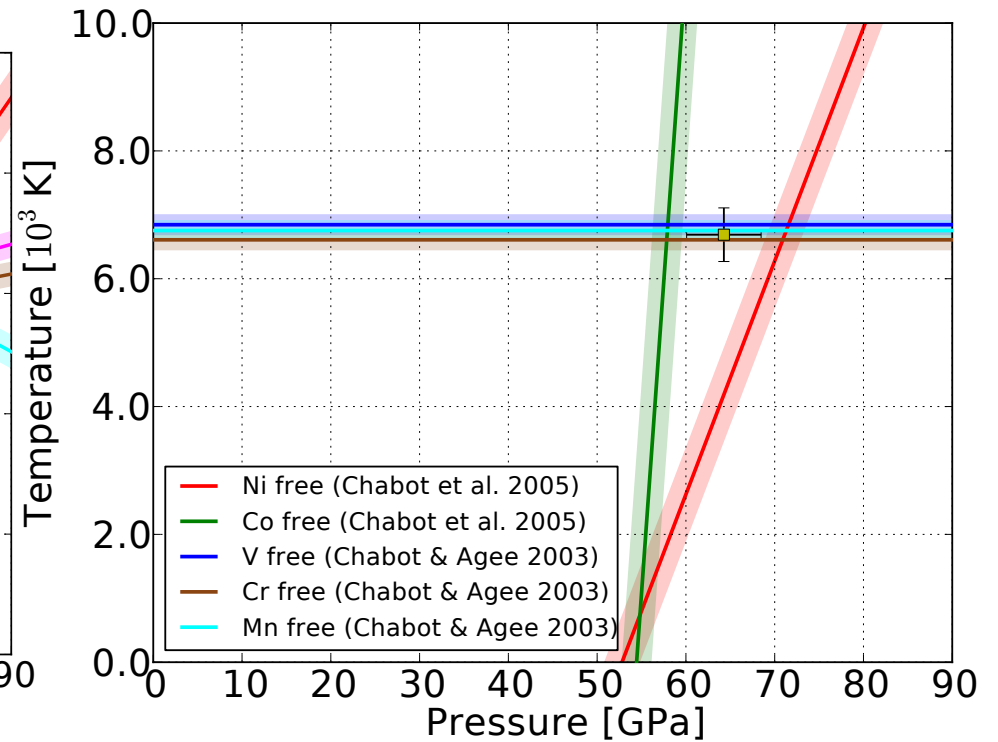
129GPa, 4270K



Effective P-T 条件の例 2



誤差が少ない場合

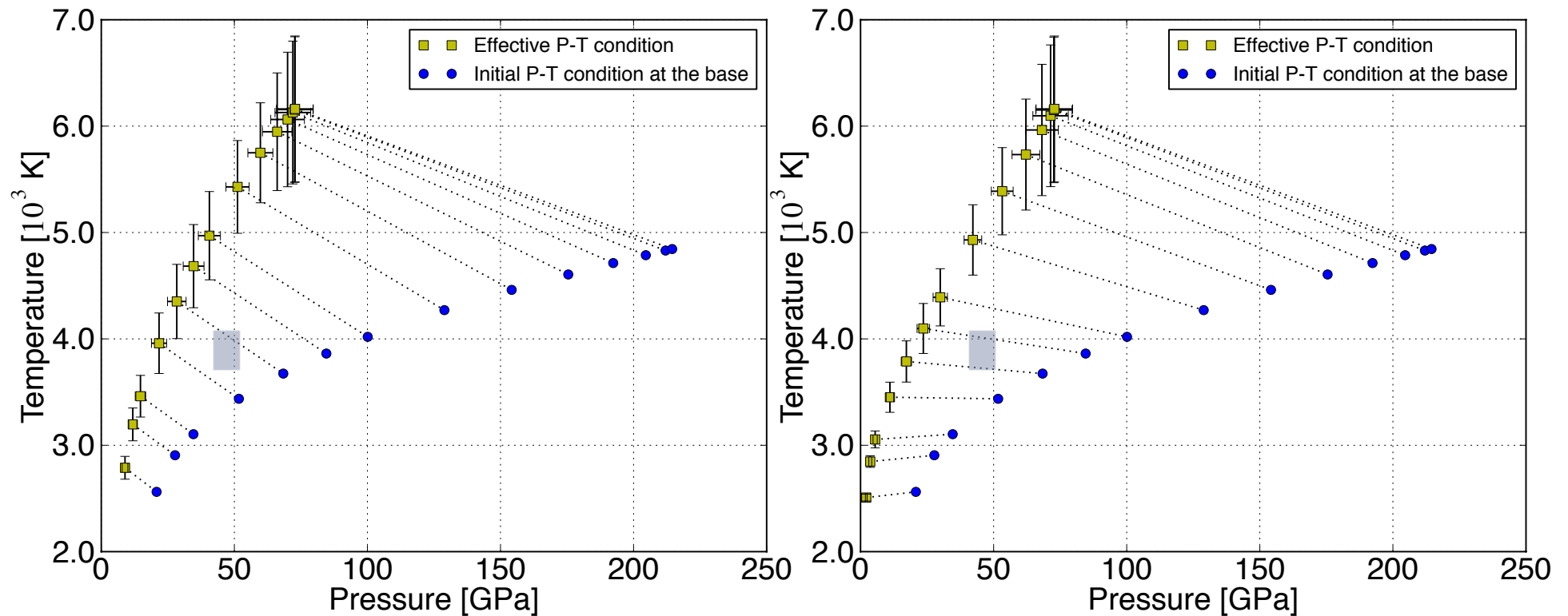


誤差が大きい場合

▶ MOの深さを変えて、P-T条件を見積もった。

Effective P-T 条件

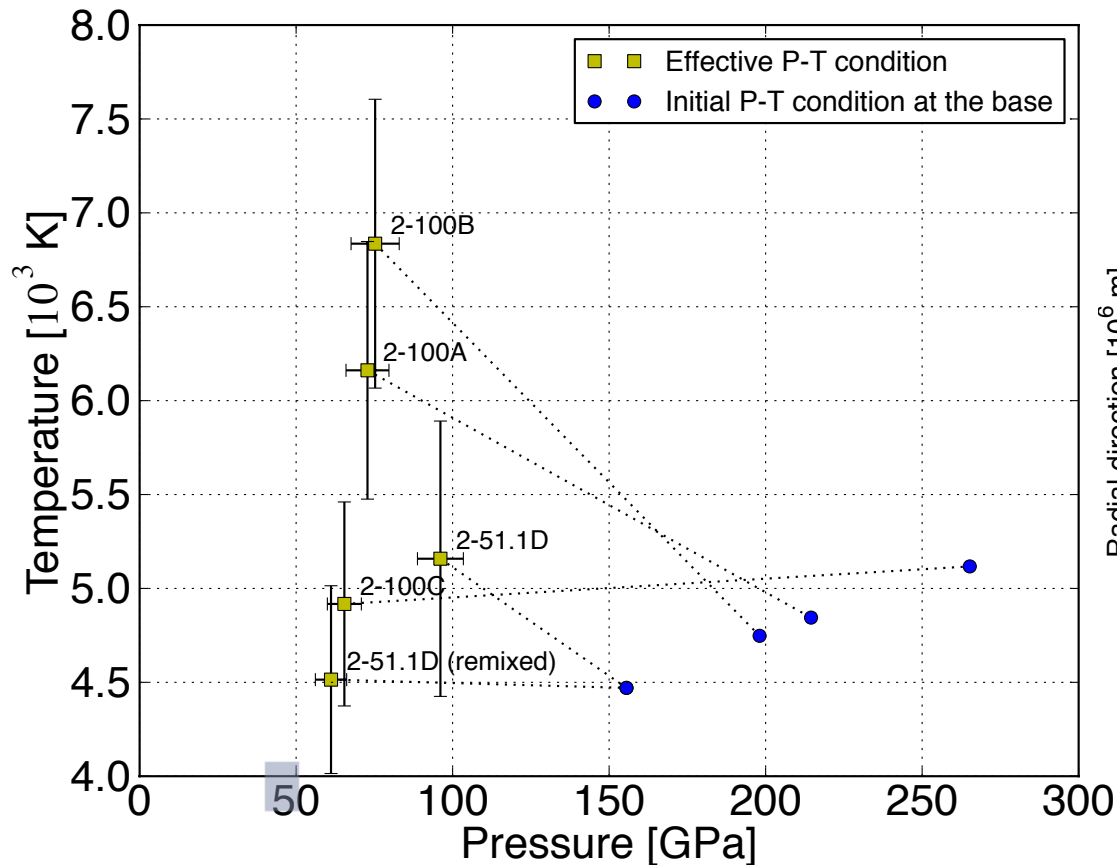
(マグマオーシャンの下の部分を混ぜたとき)



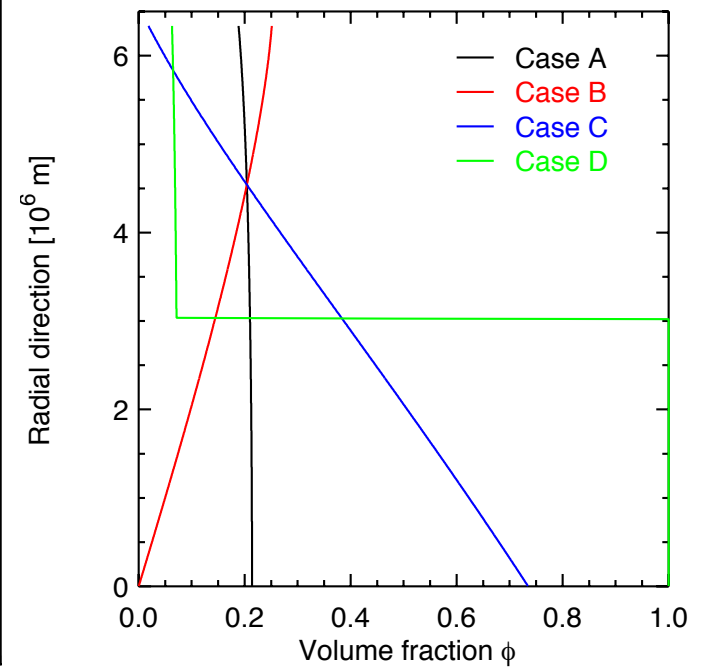
MOの底でのP-T条件(融解曲線)と平衡になるP-T条件には、かなり開きがある。(温度は高め、圧力は低め)

いろいろな初期成層での **effective P-T** 条件

全球が溶融した場合



初期金属分布



次に個別の元素ごとに見てみる

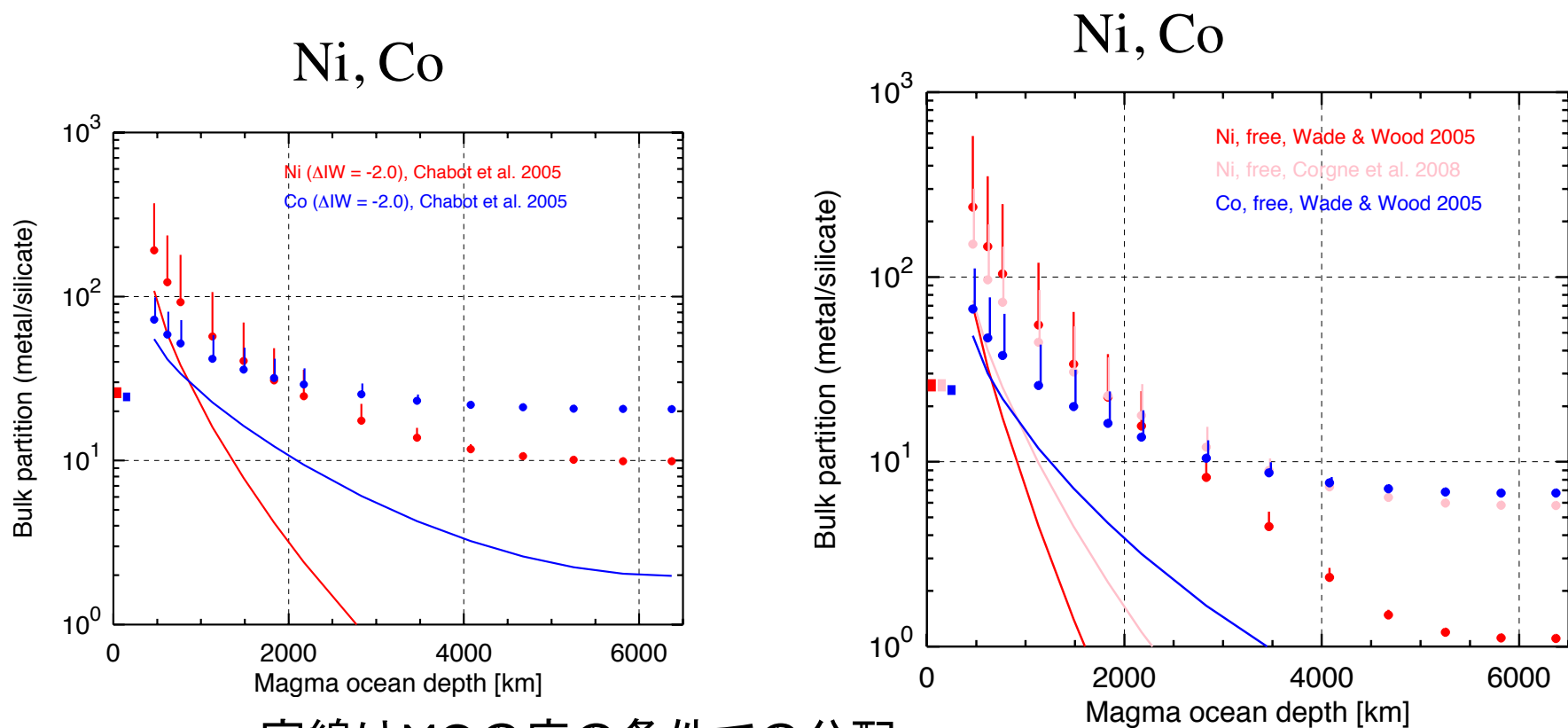
個別の元素の分配

- ▶ Ni, Co, V, Cr, Mn: Chabot and Agee, 2003, Chabot et al., 2005
- ▶ Ni, Co, V, Cr, Mn, Nb: Wood et al., 2008, Wade and Wood, 2005
- ▶ Ni, Cr, Mn, Nb: Corgne et al., 2008

$$\log D_i = a + \frac{b}{T} + c \frac{P}{T} + d(nbo / t) - \frac{v}{2} \log \left(\frac{X_{\text{FeO}}^{\text{silicate}}}{X_{\text{Fe}}^{\text{metal}}} \right) - \log \frac{(\gamma_i^{\text{metal}})}{(\gamma_{\text{Fe}}^{\text{metal}})^{v/2}}$$



コア-マントル分配の計算結果の一例

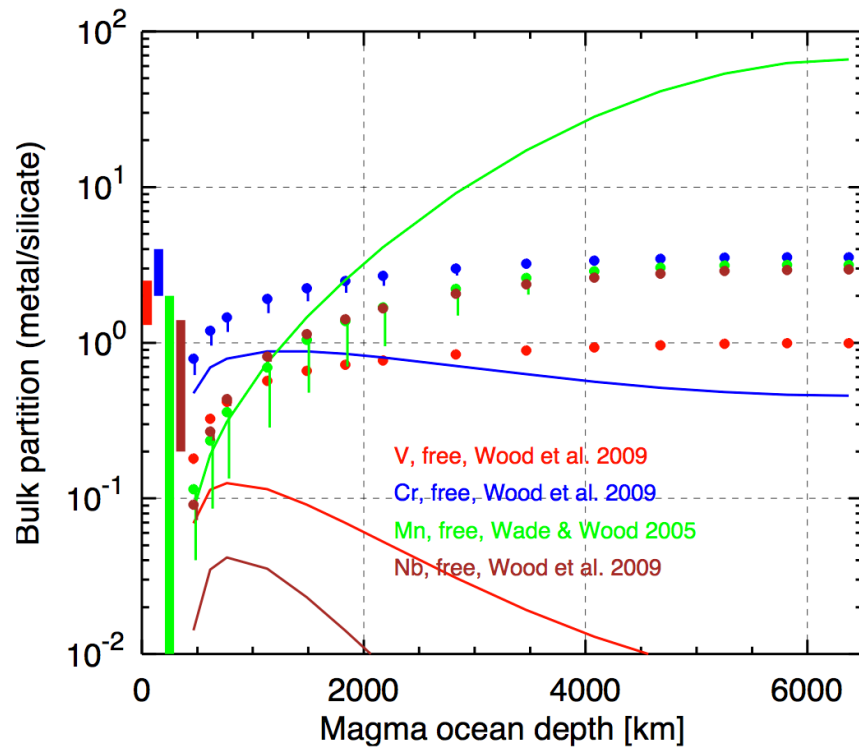


- ▶ 実線はMOの底の条件での分配
- ▶ 点は計算結果の分配
- ▶ 点からのびる線の先はMOより下部が混ざるとき

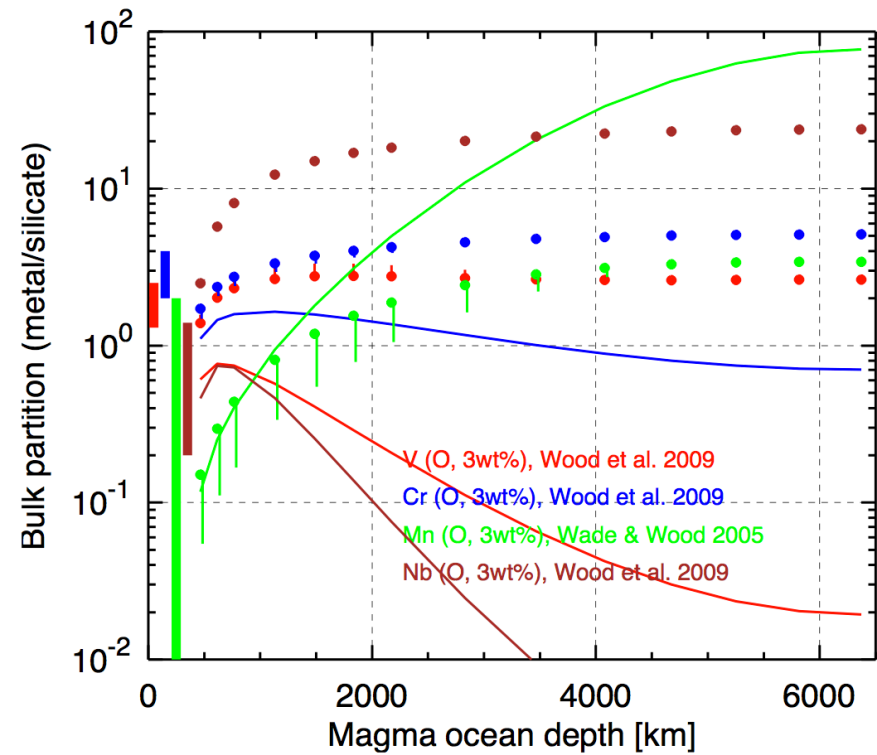
▶ 2000kmくらいの深さのMOを仮定すると調和的

コア・マントル分配

V, Cr, Mn, Nb (軽元素なし)



V, Cr, Mn, Nb (Oが3wt%)



Oを入れるとだいぶ変化
Sを入れても、あまり変わらない

まとめ

- ▶ マグマオーシャンの深さは1500~2500km程度が調和的
- ▶ より高温、高圧の実験データが必要（分配係数の外挿による誤差が非常に大きい）
- ▶ 金属の層は熱的に成層→初期のコアの温度が高い可能性（Basal MO？、初期のダイナモの熱源？）