

大気波動と保存量 Eliassen-Palm fluxとその展開

宮原三郎
(九大・理)
神戸大学大学院特別講義
2010年

参考書

- **Middle Atmosphere Dynamics, Andrews, Holton, and Leovy, Academic Press, 1987**
- **THE DYNAMIC METEOROLOGY OF THE STRATOSPHERE AND MESOSPHERE, J. R. Holton, Meteorological Monographs, Vol. 15, No. 37, AMS, 1975**

第1章：流体力学におけるエネルギー保存則 および運動量保存則

1.1 オイラー形式による場の保存則の表現

A: 任意のスカラー保存量/単位体積 F: AのFlux (ベクトル)

Continuity equation

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (1.1)$$

空間に固定された任意の体積Vについて(1.1)を積分

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{F}) dV = \frac{d}{dt} \int_V A dV + \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.2)$$

Gaussの定理

(体積内のAの変化率) = (体積表面を通過して流入するAの全量)

1.2 スカラー量保存則の例1

質量保存則

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.3)$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.4)$$

体積V中の質量変化率 = 体積表面を通して流入する質量

ρ : 質量密度 , $\rho \mathbf{v}$: 質量 Flux = 質量密度 * 流速

1.3 スカラー量保存則の例2

エネルギー保存則 (系は断熱、外力は重力のみ)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\text{energy flux}) = 0, \quad (1.5)$$

ε : 単位体積あたりの全エネルギー, U : 単位質量あたりの内部エネルギー

$$\varepsilon = \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz + U \right), \quad (1.6)$$

$$\text{energy flux} = \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + gz + U + P \right) \mathbf{v}, \quad (1.7)$$

P : 圧力

energy fluxは、エネルギーが流速により流される項と、
圧力による仕事率で表現される

エネルギー保存則導出

運動方程式および連続の式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

運動エネルギーが従う式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 \right) \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot (P \mathbf{v}) + P(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \rho g w$$

位置エネルギーの式を同様な形式で導くと

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho g z) + \nabla \cdot [(\rho g z) \mathbf{v}] = \rho g w$$

力学的エネルギーが従う式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho g z \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho g z \right) \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot (P \mathbf{v}) + P(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

内部エネルギーが従う式（断熱過程を仮定）

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \nabla \cdot [(\rho U) \mathbf{v}] = -P(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

1.4 ベクトル量保存則

\mathbf{A} : 任意のベクトル保存量/単位体積 \mathbf{F} : \mathbf{A} の Flux (テンソル)

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (1.8)$$

1.5 ベクトル量保存則の例 運動量保存則 (外力無し)

運動方程式および連続の式を利用して

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) + \nabla P = 0$$

ここで、運動量 flux テンソル

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{v} \mathbf{v} + P \delta_{ij} = \rho u_i u_j + P \delta_{ij}, \quad (1.9)$$

を用いてこれを表現すると, $\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, (1.10)

これを成分で表現すると $\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = 0$, (1.11)

圧力を運動量fluxとして扱わない形式

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P \quad , \quad (1.12)$$

(運動量の変化率) + (運動量の流出率) = (圧力傾度力)

1.5 ラグランジュ的保存量

温位 θ などのラグランジュ的保存量の連続の式による表現

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{d\theta}{dt} = 0$$

と、質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

を組み合わせると、Flux形式による温位保存則が得られる。

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \theta \mathbf{v}) = 0$$

渦位についても同様な形式で表現できる

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = 0 \quad \gggg \quad \frac{\partial (\vec{\omega}_a \cdot \nabla \theta)}{\partial t} + \nabla \cdot \{ (\vec{\omega}_a \cdot \nabla \theta) \mathbf{v} \} = 0$$

第1章まとめ

- エネルギーや運動量などの保存法則は、連続の式の形式で表現できる。
- 具体的には、単位体積あたりの保存量とそのFluxを定義することにより、記述される。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

- 上記のように流体力学でも、他の物理学と同様に保存則が連続の式の形で記述される。
- 疑問
流体力学や大気力学では、流速場や温度場等を平均場と擾乱に分離して記述する場合が多い。
この場合に保存則はどのような形をとるであろうか。
それぞれの場について保存量が存在するのであろうか。
存在するとしたら、データ解析に使用できる形を求める。

第2章：平均場と擾乱

2.1 ブシネスク近似および対数圧力座標

前章では圧縮性流体について、普通のデカルト座標を用いて保存則を表現した。

本章以降では、事象を単純化しその本質のみを理解するために、

ブシネク近似方程式系を用いる。

音波モード等は記述できない

大規模現象を記述するためには、

対数圧力座標系により圧縮性流体の運動が記述される場合が多い。

鉛直方向には静力学平衡を仮定（大規模現象のみ記述）

ブシネク近似方程式系と連続の方程式を除いてほとんど同等

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{p} \frac{\partial p w}{\partial z} = 0, \quad z = -H \ln \left(\frac{p}{p_0} \right), \quad H = \frac{RT_s}{g}$$

これらの系では、密度変動の項を方程式系より消すことが可能となり、取り扱いを簡単化できる。

2.1.1 ブシネスク近似とブシネスク方程式系

一様な重力場中の流体を考える。

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g}$$

静止流体：静力学平衡

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dP_0}{dz} = -g$$

ここで、密度は重力場中で鉛直方向に安定成層しており、圧力・密度とも高度方向に単調減少（水平方向には一様）

流体運動がある場合

近似1： 浅い流体層を考えることとし、圧力傾度力項に現れる密度を以下のように近似する

水平方向

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0 + \hat{\rho}} \frac{\partial P_0 + \hat{P}}{\partial x} \equiv \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \hat{P}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\hat{P}}{\rho_m} \right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0 + \hat{\rho}} \frac{\partial P_0 + \hat{P}}{\partial y} \equiv \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial \hat{P}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\hat{P}}{\rho_m} \right) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (2.2)$$

ρ_m : 平均密度

鉛直方向

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - g = -\frac{1}{\rho_0 + \hat{\rho}} \frac{\partial P_0 + \hat{P}}{\partial z} - g \cong -\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\hat{\rho}}{\rho_0}\right) \frac{\partial P_0 + \hat{P}}{\partial z} - g \cong -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial z} + \frac{\hat{\rho}}{\rho_0^2} \frac{\partial P_0}{\partial z} \cong -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\hat{P}}{\rho_m} \right) - \frac{\hat{\rho}}{\rho_m} g \cong -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - r$$

鉛直方向は圧力傾度力と浮力で表現される

連続の式

非圧縮性近似

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_0 + \hat{\rho}}{dt} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial y} + w \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} + w \frac{d\rho_0}{dz} = 0$$

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho_m} g = r \quad \text{を利用して、}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} - N^2 w = 0$$

ここで、

$$N^2 \equiv -\frac{g}{\rho_m} \frac{d\rho_0}{dz} \quad : \quad \text{ブラント・バイサラ振動数,} \quad \text{安定成層: } N^2 > 0$$

ブシネスク方程式系

- 運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - r \quad , \quad (2.5)$$

- 連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

- 密度変化の式（浮力変化の式）

$$\frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} - N^2 w = 0 \quad , \quad (2.7)$$

2.1.2 ブシネスク方程式系での運動量・エネルギー保存則の表現

運動方程式 (2.3), (2.4), (2.5) のベクトル表記

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Phi - r \mathbf{k} \quad , \quad (2.8) \quad \mathbf{k}: \text{Unit vector in vertical direction}$$

(2.8)に平均密度 ρ_m を掛け、連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ を利用すれば、

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} + \rho_m \Phi \delta_{ij}) = -\rho_m r \mathbf{k} \quad , \quad (2.9)$$

重力が無い場合には、

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} + \rho_m \Phi \delta_{ij}) = 0 \quad , \quad (2.10)$$

運動量fluxテンソル

$$\mathbf{F} = \rho_m \mathbf{v} \mathbf{v} + \rho_m \Phi \delta_{ij} \quad \text{or} \quad F_{ij} = \rho_m u_i u_j + \rho_m \Phi \delta_{ij} \quad , \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho_m u_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \rho_m u_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} = -\rho_m r \quad (\neq 0 \text{ if } i = 3) \quad , \quad (2.12)$$

エネルギー方程式

運動方程式(2.3)～(2.5)および連続の式(2.6)より

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 + \rho_m \Phi \right) \mathbf{v} \right] = -\rho_m w r \quad , \quad (2.13)$$

密度変化の式(2.7) N^2 を一定として、 $\frac{\rho_m r}{N^2}$ を掛けると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 \mathbf{v} \right) = \rho_m w r \quad , \quad (2.14)$$

両者の和をとると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 + \rho_m \Phi \right) \mathbf{v} \right] = 0 \quad , \quad (2.15)$$

エネルギー保存則

運動エネルギーと有効位置エネルギー(available potential energy) $\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2$ の和が保存

重力そのものではなく浮力のみを残し、圧力・密度場は基本場からのずれのみ考慮

位置エネルギー $\rho g z$ ではなく、有効位置エネルギーで表現される

非圧縮性：圧力変化による体積変化はなく、力学的エネルギーの内部エネルギーへの変換無し

有効位置エネルギーについて（補足）

- ・微小振幅単振り子（長さ l ）の位置エネルギー

$$\theta = a \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

位置エネルギーは、振り子の最下点の高さを z_0 とすると、

$$mg[z_0 + l(1 - \cos \theta)] = mg[z_0 + l\{1 - \cos(a \sin \omega t)\}]$$

微小振幅を仮定して、一周平均を求めると、 $M.P.E = \frac{1}{4}mgl a^2 + mgz_0$ となる。

mgz_0 は、振り子の運動とは関係ない位置エネルギーであり、振り子の運動エネルギーと相補的な関係にあるのは、第1項である。

$$M.K.E = \frac{1}{4}mgl a^2 = \text{Available Mean Potential energy (A.M.P.E)}$$

運動エネルギーに変換可能な位置エネルギー

mgz_0 は、振り子の糸が切れる等しない限り運動エネルギーには変換されない。

- 水面の波の位置エネルギー

水面($z=h$)から底($z=0$)の水深 h の水面の波を考える。

水面の変位が次式で与えられるとし、この波の位置エネルギーの1波長平均を求める。

$$\eta(x,t) = \eta_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$M.P.E = \frac{1}{\lambda} \rho g \int_0^\lambda \int_0^{\eta+h} z dz dx = \frac{1}{\lambda} \rho g \int_0^\lambda \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\eta(x)+h} dx = \frac{1}{4} \rho g \eta_0^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2$$

第2項は波が励起されていない場合にも存在する流体の位置エネルギーである。

波に伴う位置エネルギーは第1項 (位置エネルギーの基準値の取り方に依存しない)

$$\frac{1}{4} \rho g \eta_0^2 = \text{Available Mean Potential energy (A.M.P.E)}$$

- 気象力学で用いられているA.P.E

$$A.P.E \cong \frac{1}{2} \int_0^{P_s} \frac{\bar{T}}{\gamma_d - \bar{\gamma}} \overline{\left(\frac{T'}{\bar{T}} \right)^2} dp$$

\bar{T} : Averaged temperature over a isobaric surface, $\bar{\gamma} = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$, $\gamma_d = \frac{g}{c_p}$, P_s : surface pressure

(e. g. Haltiner and Williams, 1980: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology, 2nd ed.)

2.2 平均場と擾乱への分離

2.2.1 物理量の平均場（時間平均場あるいは空間平均場）と擾乱への分離

$$a = \bar{a} + a' , \quad (2.16)$$

定義により, $\bar{a}' = 0$

2.2.2 基礎方程式の分離

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}\mathbf{v} + \rho_m \Phi \delta_{ij}) = -\rho_m r \mathbf{k} \quad , \quad (2.9)$$

を平均場と擾乱に分離して表現

$$\frac{\partial \rho_m (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}')}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}} + \rho_m \bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}' + \rho_m \mathbf{v}'\bar{\mathbf{v}} + \rho_m \mathbf{v}'\mathbf{v}' + \rho_m \bar{\Phi} \delta_{ij} + \rho_m \Phi' \delta_{ij}) = -\rho_m (\bar{r} + r') \mathbf{k} \quad , \quad (2.9)'$$

上式の平均をとると、平均場が従う運動量方程式が得られる。

$$\frac{\partial \rho_m \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}} + \rho_m \bar{\Phi} \delta_{ij}) = -\rho_m \bar{r} \mathbf{k} - \nabla \cdot (\rho_m \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}), \quad (2.17)$$

平均場の運動量方程式は平均場のみでは記述できず、 $-\nabla \cdot (\rho_m \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'})$ が残る。

レイノルズストレスの収束・発散による擾乱場との運動量交換を表現

擾乱場の運動量方程式は (2.9)'- (2.10) より

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}' + \rho_m \mathbf{v}' \bar{\mathbf{v}} + \rho_m \Phi' \delta_{ij}) = -\rho_m r' \mathbf{k} - \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \rho_m \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}) , \quad (2.18)$$

で、与えられる, Holton(1975)。

[注] 式(2.18) で、非線形項を無視すれば、

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}' + \rho_m \mathbf{v}' \bar{\mathbf{v}} + \rho_m \Phi' \delta_{ij}) = -\rho_m r' \mathbf{k} + O(a^2) , \quad (2.19)$$

と表現され、通常使用される基本場の存在下での擾乱場の線形方程式と一致する。
運動量保存法則は、平均場と擾乱場に分離した場合、単純な形式では表現できない。
相互の運動量交換項が存在する。

同様にして、密度に関する式を分離すると、擾乱場の2次の項による平均密度変動が残る。

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{r} \bar{\mathbf{v}}) - N^2 \bar{w} = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' r'}) , \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \nabla \cdot (r' \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \bar{r}) - N^2 w' = -\nabla \cdot (r' \mathbf{v}' - \overline{r' \mathbf{v}'}) , \quad (2.21)$$

擾乱の線形化方程式は

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \nabla \cdot (r' \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \bar{r}) - N^2 w' = 0 + O(a^2) , \quad (2.22)$$

レイノルズストレスの収束・発散

$$-\nabla \cdot (\rho_m \overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_m \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_m \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_m \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{w'w'}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

擾乱場の2次の項（密度輸送）の発散・収束

$$-\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}'r'}) = - \left(\frac{\partial \overline{u'r'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'r'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'r'}}{\partial z} \right)$$

擾乱の2次の項を通じて、擾乱は平均場に影響を与える。
この場合は、平均場の運動量や密度の変動を誘起する。

2.2.3 エネルギー方程式の平均場と擾乱への分離

エネルギー方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho_m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} r^2 + \rho_m \Phi \right) \mathbf{v} \right] = 0 \quad , \quad (2.15)$$

を、平均場と擾乱に分離して表現

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_m (\bar{\mathbf{v}}^2 + 2\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}'^2) + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} (\bar{r}^2 + 2\bar{r}r' + r'^2) \right] \\ & + \nabla \cdot \left[\left\{ \frac{1}{2} \rho_m (\bar{\mathbf{v}}^2 + 2\bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}'^2) + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} (\bar{r}^2 + 2\bar{r}r' + r'^2) + \rho_m (\bar{\Phi} + \Phi') \right\} (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \right] = 0 \quad , \quad (2.15)' \end{aligned}$$

上式の平均を取ると、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_m (\bar{\mathbf{v}}^2 + \overline{\mathbf{v}'^2}) + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} (\bar{r}^2 + \overline{r'^2}) \right] \\ & + \nabla \cdot \left[\left\{ \frac{1}{2} \rho_m \bar{\mathbf{v}}^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \bar{r}^2 \right\} \bar{\mathbf{v}} + \rho_m \bar{\Phi} \bar{\mathbf{v}} \right] + \nabla \cdot \left[\left\{ \frac{1}{2} \rho_m \overline{\mathbf{v}'^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \overline{r'^2} \right\} \bar{\mathbf{v}} + \rho_m \overline{\Phi' \mathbf{v}'} \right] \\ & + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_m \overline{\mathbf{v}'^2 \mathbf{v}'} + \frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \overline{r'^2 \mathbf{v}'} \right) + \nabla \cdot \left[\rho_m \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}' \bar{\mathbf{v}}} \right] + \nabla \cdot \left[\frac{\rho_m}{N^2} \overline{r' \mathbf{v}' \bar{r}} \right] = 0 \quad , \quad (2.23) \end{aligned}$$

(2.20) は系のエネルギー保存則を表現しているが、平均場・擾乱場について分離されていない。

- ・平均場・擾乱場のエネルギー方程式への分離
運動量に関する平均場・擾乱場の式

$$\frac{\partial \rho_m \bar{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{v} \bar{v} + \rho_m \bar{\Phi} \delta_{ij}) = -\rho_m \bar{r} \mathbf{k} - \nabla \cdot (\rho_m \bar{v}' \mathbf{v}'), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \rho_m \mathbf{v}'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{v} \mathbf{v}' + \rho_m \mathbf{v}' \bar{v} + \rho_m \Phi' \delta_{ij}) = -\rho_m r' \mathbf{k} - \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}' \mathbf{v}' - \rho_m \bar{v}' \mathbf{v}'), \quad (2.18)$$

及び、浮力（密度）に関する平均場・擾乱場の式

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{r} \bar{v}) - N^2 \bar{w} = -\nabla \cdot (\bar{v}' r'), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \nabla \cdot (r' \bar{v} + \mathbf{v}' \bar{r}) - N^2 w' = -\nabla \cdot (r' \mathbf{v}' - \bar{r}' \mathbf{v}'), \quad (2.21)$$

より、
平均場の運動エネルギーの式、有効位置エネルギーの式、
擾乱場の運動エネルギーの式、有効位置エネルギーの式を導出する。

$$\bar{v} \cdot (2.17), \quad \mathbf{v}' \cdot (2.18), \quad \frac{\rho_m}{N^2} \bar{r} \times (2.20), \quad \frac{\rho_m}{N^2} r' \times (2.21)$$

を実行し平均すると、それぞれのエネルギー方程式が得られる。

平均場の運動エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m \bar{v}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_m \bar{v}^2 \bar{v} + \rho_m \bar{\Phi} \bar{v} \right) + \nabla \cdot \left[\rho_m \overline{v'v'v} \right] = -\rho_m \bar{r} \mathbf{k} \cdot \bar{v} - [\bar{K} \rightarrow K'], \quad (2.24)$$

平均場の有効位置エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \bar{r}^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \bar{r}^2 \bar{v} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m}{N^2} \overline{r'v'r} \right) = \rho_m \bar{r} \mathbf{k} \cdot \bar{v} - [\bar{P} \rightarrow P'], \quad (2.25)$$

擾乱場の運動エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho_m \overline{v'^2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \rho_m \overline{v'^2} \bar{v} + \rho_m \overline{\Phi'v'} \right) = -\rho_m \overline{r'v'} \cdot \mathbf{k} + [\bar{K} \rightarrow K'], \quad (2.26)$$

擾乱場の有効位置エネルギーの式

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \overline{r'^2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\rho_m}{N^2} \overline{r'^2} \bar{v} \right) = \rho_m \overline{r'v'} \cdot \mathbf{k} + [\bar{P} \rightarrow P'], \quad (2.27)$$

ここで

$[\bar{K} \rightarrow K']$: 平均場の運動エネルギーから擾乱場の運動エネルギーへの変換項

$[\bar{P} \rightarrow P']$: 平均場の有効位置エネルギーから擾乱場の有効位置エネルギーへの変換項

変換項

$$\begin{aligned}
 [\bar{K} \rightarrow K'] = & -\rho_m \left(\overline{u'u'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right. \\
 & + \overline{v'u'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{v'v'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \overline{v'w'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
 & \left. + \overline{w'u'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \overline{w'v'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \overline{w'w'} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right), \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

$$[\bar{P} \rightarrow P'] = -\frac{\rho_m}{N^2} \left(\overline{u'r'} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \overline{v'r'} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} + \overline{w'r'} \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} \right), \quad (2.29)$$

$$[\bar{P} \rightarrow \bar{K}] = -\rho_m \bar{r} \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (2.30)$$

$$[P' \rightarrow K'] = -\rho_m \overline{r'v'} \cdot \mathbf{k}, \quad (2.31)$$

(2.24) ~ (2.31)は、Lorenz cycle of energy conversions の微分での表現
 通常は平均は帯状平均(zonal mean)が使用され、大気全領域についての積分値について
 エネルギー解析が行われている。

2.2.4 第2章まとめ

- ・ 場を平均場と擾乱場に分離して記述

平均場と擾乱の和は、当然のことながら運動量保存法則・エネルギー保存法則を満足しかし、平均場、擾乱場それぞれは保存則を満足しない。

平均場と擾乱場に相互作用が存在する

運動量の場合

平均場の方程式：擾乱場との運動量交換（レイノルズストレスとその収束発散）

擾乱場の方程式：平均場との運動量交換

浮力（密度）の場合

平均場・擾乱場の間交換（擾乱による密度輸送の収束発散）

エネルギーの場合

Lorenz cycle of energy conversions

平均場・擾乱場の間エネルギー交換

- ・ 疑問

擾乱場について何か保存法則的なものが成り立たないか？

擾乱場が平均場に及ぼす影響について、何か法則を導けないか？

第3章：回転系での波動擾乱に伴う保存量

Eliassen-Palm Flux

3.1 回転系でのブシネスク方程式系

この章では、回転系での波動擾乱について議論を行うが、回転系で運動方程式を記述する結果生ずるコリオリ力については、水平面内速度に働く、水平成分のみを考慮する (Traditional approximation)。

また、問題を簡単化するため、局所デカルト座標系を使用し、地球の曲率効果は無視する。

・運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} - r \quad , \quad (3.3)$$

$$f = f_0 = \text{const.} (f - \text{plane}) \quad \text{or} \quad f = f_0 + \beta y (\beta - \text{plane})$$

- 連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

- 密度変化の式

$$\frac{\partial r}{\partial t} + u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} + w \frac{\partial r}{\partial z} - N^2 w = 0 \quad , \quad (3.5)$$

3.1.1 帯状平均基本場

波動擾乱を考える上で、基本場は以下のような条件を満たしていると仮定する。

- 帯状平均東西風 (Zonal mean zonal wind)が存在 $\bar{u}(y,z)$
- 帯状平均東西風は温度風の関係を満足している

$$f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \quad , \quad (3.6)$$

- ブラント・バイサラ振動数は緯度と高度の関数

$$N^2(y,z) = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial z} = -\frac{g}{\rho_m} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad , \quad (3.7)$$

3.1.2 波動擾乱の線形方程式

- ・上記の帯状平均場中に擾乱が存在し、擾乱の振幅は小さいと仮定：線形方程式で記述
- ・擾乱を励起あるいは減衰させる外力や摩擦力（粘性力）なども存在
- ・擾乱を励起あるいは減衰させる加熱・冷却・熱伝導も存在

運動方程式

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - fv' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + X' \quad , \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + fu' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial y} + Y' \quad , \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi'}{\partial z} - r' + Z' \quad , \quad (3.10)$$

連続の式

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad , \quad (3.11)$$

密度変化の式

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial r'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 w' = J' \quad , \quad (3.12)$$

温度風の関係より

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial r'}{\partial x} + f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} v' - N^2 w' = J' \quad , \quad (3.13)$$

エネルギー方程式を作る

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{u'^2} + \frac{1}{2} \overline{v'^2} + \frac{1}{2} \overline{w'^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{r'^2}}{N^2} \right) + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial \overline{u'\Phi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\Phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\Phi'}}{\partial z} + \overline{u'X'} + \overline{v'Y'} + \overline{w'Z'} + \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{u'^2} + \frac{1}{2} \overline{v'^2} + \frac{1}{2} \overline{w'^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{r'^2}}{N^2} \right) + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'r'} \frac{f}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial \overline{u'\Phi'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'\Phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\Phi'}}{\partial z} + \overline{u'X'} + \overline{v'Y'} + \overline{w'Z'} + \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$\bar{u}(y,z)$, $\overline{a'b'}$: zonal mean; x independent, $\frac{\partial}{\partial x} = 0$

球面座標系で考える場合の帯状平均（経度平均）を想定
平均結果は子午面内の2次元系となる。

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'r'} \frac{f}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{v'\Phi'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'\Phi'}}{\partial z} + \overline{u'X'} + \overline{v'Y'} + \overline{w'Z'} + \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \quad (3.16)$$

$$\bar{E} = \left(\frac{1}{2} \overline{u'^2} + \frac{1}{2} \overline{v'^2} + \frac{1}{2} \overline{w'^2} + \frac{1}{2} \frac{\overline{r'^2}}{N^2} \right)$$

擾乱として、次式で与えられる波動擾乱を考える

$$\begin{pmatrix} u'(x,y,z,t) \\ v'(x,y,z,t) \\ w'(x,y,z,t) \\ \Phi'(x,y,z,t) \\ r'(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(y,z,\varepsilon t) \\ V(y,z,\varepsilon t) \\ W(y,z,\varepsilon t) \\ \Phi(y,z,\varepsilon t) \\ R(y,z,\varepsilon t) \end{pmatrix} \exp[ik(x-ct)] \quad (3.17)$$

$$\begin{pmatrix} X'(x,y,z,t) \\ Y'(x,y,z,t) \\ Z'(x,y,z,t) \\ J'(x,y,z,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(y,z,\varepsilon t) \\ Y(y,z,\varepsilon t) \\ Z(y,z,\varepsilon t) \\ J(y,z,\varepsilon t) \end{pmatrix} \exp[ik(x-ct)] \quad (3.18)$$

- 東西方向には波数 k の波動擾乱
- 波動は、南北、鉛直方向には任意関数形を持ってよい
- 位相速度 c で東西方向に伝播
- εt は、波形が時間とともに波動の周期に比較して十分長い時間で緩やかに変動する可能性を表現している

擾乱の2次の量の帯状平均について

$$a'(x,y,z,t) = A(y,z,\varepsilon t) \exp[ik(x-ct)], \quad b'(x,y,z,t) = B(y,z,\varepsilon t) \exp[ik(x-ct)]$$

$$\text{Re } a' = A_r \cos[k(x-ct)] - A_i \sin[k(x-ct)]$$

$$\overline{a'b'} = \overline{\text{Re } a' \text{Re } b'} = \overline{\{A_r \cos[k(x-ct)] - A_i \sin[k(x-ct)]\} \{B_r \cos[k(x-ct)] - B_i \sin[k(x-ct)]\}}$$

$$= \frac{1}{2} [A_r B_r + A_i B_i] = \frac{1}{4} [AB^* + A^* B]$$

3.1.3 波動擾乱のエネルギー方程式

(3.17), (3.18)の形の波動擾乱についてエネルギー方程式を作る

$$\overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'r'} \frac{f}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'\phi'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\phi'}}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \overline{u'X'} + \overline{v'Y'} + \overline{w'Z'} + \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \quad (3.19)$$

$-\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$: 波動擾乱の波形の時間変動が緩やかなため、エネルギーの局所変化率も緩やか

左辺第1, 2項は、平均帯状流とのエネルギー変換項、第3項は帯状平均南北密度傾度 (available potential energy) とのエネルギー変換項である

第4, 5項は波動擾乱によるエネルギー流速発散(Energy flux divergence)

右辺2~5項は、外力・摩擦力等による仕事率、加熱・冷却によるエネルギー変化率

- ・前章で示したように、平均場と擾乱場について独立にエネルギー保存則は成り立っていない
- ・運動量についても、同様である。

疑問／問題設定

- ・ 擾乱場に固有の保存量・保存則等が定義できるであろうか？

(3.8), (3.13)式を利用して、この疑問に答える。

X方向の運動方程式 (3.8)

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f v' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + X', \quad (3.8)$$

に(3.17), (3.18)を代入し共通項である $\exp[ik(x-ct)]$ を落として書くと

$$ik(\bar{u}-c)U + V \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + W \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - fV = -ik\Phi + X - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (3.20)$$

(3.20)* W^* - (3.20)* W を作ると

$$\begin{aligned} & ik(\bar{u}-c)(UW^* + U^*W) + (f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y})(VW^* - VW^*) \\ &= -ik(\Phi^*W + \Phi W^*) + (XW^* - X^*W) + \varepsilon(\frac{\partial U^*}{\partial t}W - \frac{\partial U}{\partial t}W^*) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial r'}{\partial x} + f \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} v' - N^2 w' = J', \quad (3.13) \quad \text{より}$$

$$W = \frac{ik(\bar{u}-c)}{N^2} R + \frac{f}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} V - \frac{J}{N^2} + \frac{\varepsilon}{N^2} \frac{\partial R}{\partial t}$$

これを、先の式に代入整理すると

$$\begin{aligned}
& (\bar{u} - c) \left[\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right] + \overline{\phi'w'} \\
&= -\frac{i}{4k} \left[(XW^* - X^*W) + \varepsilon \left(\frac{\partial U^*}{\partial t} W - \frac{\partial U}{\partial t} W^* \right) - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left\{ \frac{1}{N^2} (VJ^* - V^*J) + \frac{\varepsilon}{N^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} V^* - \frac{\partial R^*}{\partial t} V \right) \right\} \right] \equiv R_2, \quad (3.21)
\end{aligned}$$

(3.20)* V^* - (3.20)* V を作り同様の計算を実行すると

$$\begin{aligned}
& (\bar{u} - c) \left[\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right] + \overline{\phi'v'} \\
&= -\frac{i}{4k} \left[(XV^* - X^*V) + \varepsilon \left(\frac{\partial U^*}{\partial t} V - \frac{\partial U}{\partial t} V^* \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left\{ \frac{1}{N^2} (VJ^* - V^*J) + \frac{\varepsilon}{N^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} V^* - \frac{\partial R^*}{\partial t} V \right) \right\} \right] \equiv R_1, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

$\frac{\partial(3.22)}{\partial y} + \frac{\partial(3.21)}{\partial z} = \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z}$ を作ると

$$\begin{aligned}
& \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{v'r'} \frac{f}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'\phi'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\phi'}}{\partial z} \\
&+ (\bar{u} - c) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) \right] = \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z}
\end{aligned}$$

エネルギー方程式(3.19)を代入すると

$$\begin{aligned}
 & (\bar{u} - c) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial R_1}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \overline{u'X'} - \overline{v'Y'} - \overline{w'Z'} - \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

$$R_1 = -\frac{i}{4k} \left[(XV^* - X^*V) + \varepsilon \left(\frac{\partial U^*}{\partial t} V - \frac{\partial U}{\partial t} V^* \right) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \left\{ \frac{1}{N^2} (VJ^* - V^*J) + \frac{\varepsilon}{N^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} V^* - \frac{\partial R^*}{\partial t} V \right) \right\} \right]$$

$$R_2 = -\frac{i}{4k} \left[(XW^* - X^*W) + \varepsilon \left(\frac{\partial U^*}{\partial t} W - \frac{\partial U}{\partial t} W^* \right) - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \left\{ \frac{1}{N^2} (VJ^* - V^*J) + \frac{\varepsilon}{N^2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} V^* - \frac{\partial R^*}{\partial t} V \right) \right\} \right]$$

右辺各項は波が定常・非散逸・外力／加熱なしであれば消える。

$$(\bar{u} - c) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) \right] = 0$$

$(\bar{u} - c) \neq 0$ であれば

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) = 0, \quad (3.24)$$

$$F_y = -\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \quad , \quad F_z = -\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \quad : \quad \text{Eliassen - Palm (E - P) Flux}$$

エリアッセン・パーム flux(E-P flux)は非発散となる。

エリアッセン・パームの定理

Eliassen and Palm: On the transfer of energy in stationary mountain waves,
Geofysiske Publikasjoner, Vol. XXII, No.3, 1961

波動についての保存量の形式に(3.23)を変形

$$\varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - (\bar{u} - c) \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} + \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'w'} + \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) \right] = -\frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial R_2}{\partial z} + \overline{u'X'} + \overline{v'Y'} + \overline{w'Z'} + \frac{\overline{r'J'}}{N^2} \equiv R_3$$

$(\bar{u} - c)$ で上式を割り次式を得る.

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) = \frac{R_3}{c - \bar{u}} \equiv R_4, \quad (3.23')$$

この式は連続の式の形をしており、波動の伝播に伴って波動のエネルギーは保存されないが、

$\left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} \right)$ が保存量となっていることを示しており、Wave activityと呼ばれている。

$\left(\frac{\bar{E}}{\omega - k\bar{u}} \right)$ 断熱不変量, Wave action と呼ばれている物理量. $c = \frac{\omega}{k}$

断熱不変量 (朝永振一郎著 量子力学 I より引用)

振子の長さを振子の固有周期と比較して
非常にゆっくりと変化させる (断熱変化)

この場合、振子のエネルギー E 及び振動数 ω は
振子の長さの変化に伴って変化する

しかし、両者の比 $\frac{E}{\omega} = \text{const.}$ となる

この量は、断熱不変量とよばれる
詳細に興味がある場合は、原著を参照のこと

あるいは
ランダウ・リフシッツ 力学

今対象としている系では、平均帯状流とのエネルギー交換で波のエネルギーは変化するが、波の振動数 (ドップラーシフトした振動数、intrinsic frequency) も平均帯状流の変化に伴ってゆっくり変化し、以下の量が保存量となる

$$\left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} \right) \quad \text{or} \quad \left(\frac{\bar{E}}{\omega - k\bar{u}} \right)$$

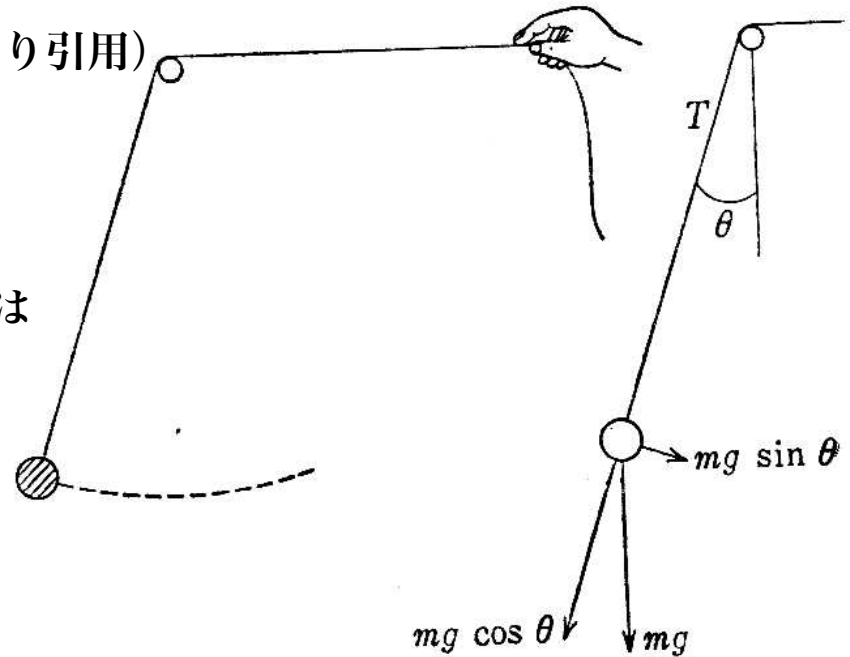


図7 振子の振動とその断熱変形

3.1.4 Generalized Eliassen-Palm Theorem

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{E}}{\overline{u} - c} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{-u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{-u'w'} - \left(f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right) = \frac{R_3}{c - \overline{u}} \equiv R_4, \quad (3.23')$$

(3.23') を整理して記述すると

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = D + O(a^3), \quad (3.25)$$

Generalized Eliassen – Palm theorem

$$A \equiv \frac{\overline{E}}{\overline{u} - c} : \text{Wave activity}$$

$$\mathbf{F} \equiv \left[\overline{-u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \overline{v'r'}, \quad \overline{-u'w'} - \left(f - \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right], \quad \text{Eliassen – Palm flux}$$

If $D = 0$ and $\overline{u} - c \neq 0$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, *Eliassen – Palm theorem*

Charney – Drazin Nonacceleration theorem

Charney and Drazin: Propagation of planetary – scale disturbances from the lower into the upper atmosphere, JGR, 66, 83 – 109

第4章 E-P fluxとTEM方程式系

E-P fluxは波動が定常・非散逸・外力／加熱なしならば、
クリティカルレベル $\bar{u} - c = 0$ (critical level) 以外では、非発散である。

$$\text{div}(E - P \text{ flux}) = 0$$

E-P fluxは、具体的に物理的には波動に伴う何のfluxを表現しているのか？

$\left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} \right)$ は速度の次元を持っている。

この疑問に答えるためには、平均場の方程式を考えることが役立つ。

4.1 ブシネスク近似下の帯状平均場の方程式

(Eulerian-Mean Equation system)

帯状平均東西風は地衡風

鉛直方向は流体静力学平衡

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f\bar{v} = -\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} + \bar{X}, \quad (4.1)$$

$$f\bar{u} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = -\bar{r}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 \bar{w} = -\frac{\partial \overline{r'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{r'w'}}{\partial z} + \bar{J}, \quad (4.5)$$

右辺に波動擾乱によるレイノルズストレス項と密度輸送項および外力や散逸項，非断熱加熱・冷却項を含む

4.2 Transformed Eulerian-Mean equations (TEM) と Residual mean meridional circulation

(4.1) と (4.5) 式の右辺の波動擾乱によるレイノルズストレス項と密度輸送項の変形を考える。

ここで、理由は問わずに以下の変換を考える。

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right), \quad (4.6)$$

この \bar{w}^* が2次元の連続の式

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0, \quad (4.7)$$

を満足するように、変換

$$\bar{v}^* = \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right), \quad (4.8)$$

を定義する。

この段階では、何故このような変換を定義するのか疑問を持つのは当然！
解答は、以下の説明により自ずと明らかになってくる。

$\bar{v} = \bar{v}^* - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right)$, $\bar{w} = \bar{w}^* + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right)$ を, (4.1)と (4.5) に代入し整理すると

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f \bar{v}^* = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{1}{N^2} \overline{v'r'} \right] + \bar{X}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 \bar{w}^* = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{r'w'} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right] + \bar{J}, \quad (4.10)$$

の形に変形される。左辺の移流項やコリオリ力, 断熱加熱冷却項は変換された速度

\bar{v}^* , \bar{w}^*

で表現されている。

(4.9)右辺は, $div[E - P \text{ Flux}]$ の形となっている。

(4.10)の右辺 $\frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{r'w'} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right]$ については,

密度擾乱に関する方程式

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial r'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 w' = J', \quad (3.12)$$

より, available potential energyについての式を作ると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{r'^2} \right) + \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - \overline{r'w'} = \frac{\overline{r'J'}}{N^2}, \quad (4.12)$$

(4.12)式より，波動擾乱が定常，非加熱であれば $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{r'^2} \right) = 0$, $\frac{\overline{r'J'}}{N^2} = 0$ より，

$$\frac{\overline{v'r'}}{N^2} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - \overline{r'w'} = 0, \quad (4.13)$$

となり，

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{r'w'} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right] = 0, \quad (4.14)$$

が，得られる．この結果，波動擾乱が定常，非散逸，非加熱およびクリティカルレベル以外では，擾乱の2次の効果は右辺から消える．

$$\mathbf{F} \equiv \left[-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'}, \quad -\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{\overline{v'r'}}{N^2} \right], \quad \text{Eliassen - Palm flux}$$

If $D = 0$ and $\bar{u} - c \neq 0$, $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, *Eliassen - Palm theorem*

Charney - Drazin Nonacceleration theorem

散逸，非定常性などがあれば，平均東西流を加速または減速
E-P flux: 東西方向の平均運動量流束

$\left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c}\right)$ は，この場合には波に伴う運動量と考えられる。

Photon アナロジー

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{c - \bar{u}} \right)$$

$$\bar{u} = \left(\frac{\bar{E}}{c - \bar{u}} \right)$$

一般には，実際に平均東西風（平均場の運動量）とならない：

擬運動量

輻射圧：Photonが壁面に圧力を与える。

V 弦の横振動の圧力

光や弦の振動が壁に圧力を及ぼすということは一見不思議に思われるかもしれない。なぜなら、振動とは往復運動の繰り返しであるから、外に対してあるときは正の、あるときは負の影響を与え、平均においてそれが相殺して何の影響もないことになるのではないか、という議論ができそうだからである。しかしよく調べると、あるときは正の、あるときは負の、ということとは誤りであることがわかる(振子の場合には本文で述べるところでこれが明らかである)。

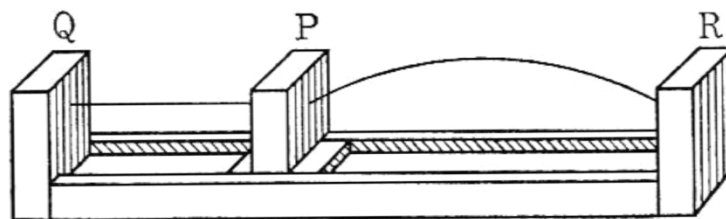


図 V 滑り板を入れた弦

朝永振一郎著 量子力学I

真空中の電磁波(Photon), 結晶の格子振動, 固体の弾性振動, 流体中の波動, 弦の振動, 振子など振動に伴って一般的に平均的な力を伴っている。流体の場合でも特殊な場合のみ, その力が実際の平均運動量となる場合がある。一般的には運動量とは等しくならない。
擬運動量

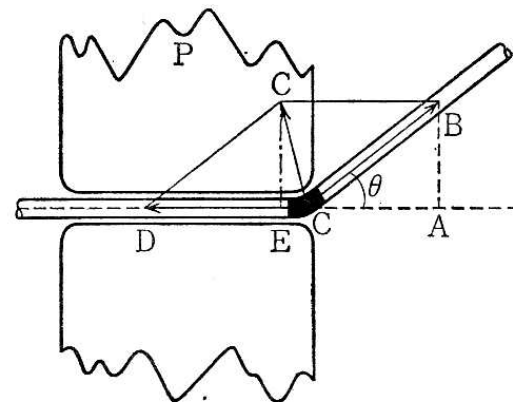


図 VI 滑り板に働く力

Transformed Eulerian-Mean Equations (TEM)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}^* \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - f \bar{v}^* = \nabla \cdot \mathbf{F} + \bar{X} , \quad (4.15)$$

$$f \bar{u} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} , \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = -\bar{r} , \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0 , \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{v}^* \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 \bar{w}^* = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{r'w'} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right] + \bar{J} , \quad (4.19)$$

$$\mathbf{F} = \left(-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} , -\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{1}{N^2} \overline{v'r'} \right) , \quad (4.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\overline{u'v'} - \frac{1}{N^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \overline{v'r'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\overline{u'w'} - \left(f - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \frac{1}{N^2} \overline{v'r'} \right] , \quad (4.21)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right) , \quad (4.22)$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N^2} \right) , \quad (4.23)$$

\bar{v}^* , \bar{w}^* : Residual mean meridional circulation

殘差子午面循環

4.3 Lagrangian mean meridional circulation, Stokes drift, and Residual mean meridional circulation

4.3.1 Eulerian zonal mean and Lagrangian zonal mean

Eulerian zonal mean of a physical quantity a :

$$\overline{a(x,y,z,t)} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda a(x,y,z,t) dx = \bar{a}(y,z,t) , \quad (4.24)$$

Lagrangian zonal mean of a physical quantity a :

$$\overline{a(x,y,z,t)}^L = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda a(x + \xi', y + \eta', z + \zeta', t) dx = \bar{a}^L(y,z,t) , \quad (4.25)$$

where

$\xi'(x,y,z,t)$, $\eta'(x,y,z,t)$, and $\zeta'(x,y,z,t)$

are fluid particle displacement in x , y , and z directions, respectively.

4.3.2 Lagrangian mean meridional circulation and Stokes drift

Lagrangian mean meridional circulation

$$\bar{v}^L(y,z,t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v(x + \xi, y + \eta', z + \zeta, t) dx, \quad (4.26)$$

$$\bar{w}^L(y,z,t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda w(x + \xi, y + \eta', z + \zeta, t) dx, \quad (4.27)$$

where v and w are northward and vertical velocity, respectively.

小振幅の波動擾乱を仮定して平均をとる

$$\begin{aligned} \bar{v}^L(y,z,t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v(x + \xi, y + \eta', z + \zeta, t) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda v(x, y, z, t) dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial v'}{\partial x} \xi + \frac{\partial v'}{\partial y} \eta' + \frac{\partial v'}{\partial z} \zeta dx \\ &= \bar{v}(y,z,t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial v' \xi}{\partial x} + \frac{\partial v' \eta'}{\partial y} + \frac{\partial v' \zeta}{\partial z} dx - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) v' dx \\ &= \bar{v}(y,z,t) + \frac{\overline{\partial v' \eta'}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial v' \zeta}}{\partial z} = \bar{v} + \bar{v}_s, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}^L(y,z,t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda w(x + \xi, y + \eta', z + \zeta, t) dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda w(x, y, z, t) dx + \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial w'}{\partial x} \xi + \frac{\partial w'}{\partial y} \eta' + \frac{\partial w'}{\partial z} \zeta dx \\ &= \bar{w}(y,z,t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{\partial w' \xi}{\partial x} + \frac{\partial w' \eta'}{\partial y} + \frac{\partial w' \zeta}{\partial z} dx - \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) w' dx \\ &= \bar{w}(y,z,t) + \frac{\overline{\partial w' \eta'}}{\partial y} + \frac{\overline{\partial w' \zeta}}{\partial z} = \bar{w} + \bar{w}_s, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} = 0$$

∴

$$\frac{\partial \xi'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \xi'}{\partial x} = u' + \eta' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \zeta' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta'}{\partial x} = v',$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} = w',$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} \right) = 0,$$

∴

$$\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial \eta'}{\partial y} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z} = 0.$$

See Andrews, Holton and Leovy, *Middle Atmosphere Dynamics*, p136.

$$\bar{v}^L(y,z,t) = \bar{v}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{v'\eta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'\zeta'}}{\partial z} = \bar{v} + \bar{v}_s, \quad (4.28)'$$

$$\bar{w}^L(y,z,t) = \bar{w}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{w'\eta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\zeta'}}{\partial z} = \bar{w} + \bar{w}_s. \quad (4.29)'$$

\bar{v}_s , \bar{w}_s : Stokes drift

If wave disturbances are sinusoidal, $\overline{v'\eta'} = 0$, and $\overline{w'\zeta'} = 0$, because of the orthogonality.

Thus,

$$\bar{v}^L(y,z,t) = \bar{v}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{v'\zeta'}}{\partial z} = \bar{v} + \bar{v}_s, \quad (4.28)''$$

$$\bar{w}^L(y,z,t) = \bar{w}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{w'\eta'}}{\partial y} = \bar{w} + \bar{w}_s. \quad (4.29)''$$

And

$$\overline{v'\zeta'} = \zeta' \left(\frac{\partial \eta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta'}{\partial x} \right) = \frac{\partial \eta' \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta' \zeta'}{\partial x} - \eta' \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} \right) = \frac{\partial \eta' \zeta'}{\partial t} - \eta' w',$$

if waves are steady, $\frac{\partial \eta' \zeta'}{\partial t} = 0$,

thus, we get;

$$\overline{v'\zeta'} = -\overline{\eta' w'}. \quad (4.30)$$

$$\bar{v}^L(y,z,t) = \bar{v}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{v'\zeta'}}{\partial z} = \bar{v} + \bar{v}_s, \quad (4.28)'''$$

$$\bar{w}^L(y,z,t) = \bar{w}(y,z,t) - \frac{\partial \overline{v'\zeta'}}{\partial y} = \bar{w} + \bar{w}_s. \quad (4.29)'''$$

Proof of $\overline{v'\zeta} = \frac{1}{N^2} \overline{r'v'}$ in no heating case

$$\frac{\partial r'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial r'}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N^2 w' = 0, \quad (3.12)$$

Substituting $v' = \frac{\partial \eta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \eta'}{\partial x}$ and $w' = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x}$ into (3.12), we get

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(r' + \eta' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - \zeta' N^2 \right) = 0.$$

If $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \neq 0$, $r' + \eta' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - \zeta' N^2 = 0$,

and

$$\zeta' = \frac{1}{N^2} \left(r' + \eta' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right).$$

Thus, we get

$$\overline{v'\zeta} = \overline{\frac{v'}{N^2} \left(r' + \eta' \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} \right)} = \frac{1}{N^2} \overline{r'v'}, \text{ because of } \overline{v'\eta} = 0.$$

$$\overline{v'\zeta} = \frac{1}{N^2} \overline{r'v'}, \quad (4.31)$$

$$\bar{v}^L(y,z,t) = \bar{v}(y,z,t) + \frac{\partial \overline{v'\zeta}}{\partial z} = \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \overline{r'v'} \right) = \bar{v}^* = \bar{v} + \bar{v}_s, \quad (4.31)$$

$$\bar{w}^L(y,z,t) = \bar{w}(y,z,t) - \frac{\partial \overline{v'\zeta}}{\partial y} = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N^2} \overline{r'v'} \right) = \bar{w}^* = \bar{w} + \bar{w}_s. \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2} \overline{r'v'} \right) = \bar{v}_s, \quad (4.31)'$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{N^2} \overline{r'v'} \right) = \bar{w}_s, \quad (4.32)'$$

Residual mean meridional circulationは波動擾乱が、定常、非散逸、非加熱である場合には、子午面内での帯状平均物質循環速度に一致する。

一般の場合においても、子午面内での帯状平均物質循環速度を近似的に表現する場合があると考えられている。

4.4 準地衡風近似下のE-P fluxとTEM方程式系

4.4.1 Quasi-geostrophic(QG) TEM equation system and E-P flux

We define the residual mean meridional circulation as follows:

$$\bar{v}^* = \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N_0^2} \right), \quad (4.33)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N_0^2} \right), \quad (4.34)$$

where $N_0^2 = N_0^2(z)$.

(4.15)以下のTEM方程式をQG近似の下に簡略化する

基本場は波長に比較して長い空間スケールでゆっくり変化していると仮定し、
基本場の空間微分は無視する

QG TEM and E - P flux

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - f_0 \bar{v}^* = \nabla \cdot \mathbf{F} + \bar{X} , \quad (4.35)$$

$$f_0 \bar{u} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} , \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} = -\bar{r} , \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0 , \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} - N_0^2 \bar{w}^* = \bar{Q} , \quad (4.39)$$

$$\mathbf{F} = \left(-\overline{u'v'} , -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) , \quad (4.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial y} \left[-\overline{u'v'} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right] , \quad (4.41)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N_0^2} \right) , \quad (4.42)$$

$$\bar{v}^* = \bar{v} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{r'v'}}{N_0^2} \right) , \quad (4.43)$$

\bar{v}^* , \bar{w}^* : Residual mean meridional circulation

擾乱は準地衡風であり、
E-P fluxについて、特別な
関係式を導くことが可能

QG potential vorticity q と
E-P flux F を関係づける

QG stream function ψ'

$$u' = -\frac{\partial\psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial\psi'}{\partial x}, \quad (4.44)$$

$$\psi' = \frac{\Phi'}{f_0},$$

$$r' = -f_0 \frac{\partial\psi'}{\partial z}, \quad (4.45)$$

and

$$q' = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right), \quad (4.46)$$

$\overline{v'q'}$ を作り変形し、Fと関係づける

$$\begin{aligned} \overline{v'q'} &= \overline{v' \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + v' \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + v' \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right)} = \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(v' \frac{\partial\psi'}{\partial x} \right)} - \overline{\frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial\psi'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial}{\partial y} \left(v' \frac{\partial\psi'}{\partial y} \right)} - \overline{\frac{\partial v'}{\partial x} \frac{\partial\psi'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial}{\partial z} \left(v' \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right)} - \overline{\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial v'}{\partial z} \frac{\partial\psi'}{\partial z}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) - \overline{\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} \frac{\partial\psi'}{\partial x}} - \overline{\frac{\partial^2\psi'}{\partial x\partial y} \frac{\partial\psi'}{\partial y}} - \overline{\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2\psi'}{\partial z\partial x} \frac{\partial\psi'}{\partial z}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'v'} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) - 2 \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi'}{\partial x} \right)^2} - 2 \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi'}{\partial y} \right)^2} - 2 \overline{\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\psi'}{\partial z} \right)^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) = \nabla \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

$$\overline{v'q'} = \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) = \nabla \cdot \mathbf{F} , \quad (4.47)$$

E-P flux divergenceはQG potential vorticityの北向き輸送に等しい

4.4.2 線形化PV equationとWave activity equation

Zonal mean QG potential vorticity

$$\bar{q} = f_0 + \beta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = f_0 + \beta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \bar{r} \right) , \quad (4.48)$$

The linearized QG PV equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) q' + v' \bar{q}_y = s' , \quad (4.49)$$

where $\bar{q}_y \equiv \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$.

Multiplying $\frac{q'}{\bar{q}_y}$ and taking average,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\bar{q}_y} \right) + \overline{v'q'} = \frac{\overline{s'q'}}{\bar{q}_y} , \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = D \quad , \quad (4.51)$$

$$A \equiv \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_y} : \text{QG Wave activity,}$$

and $E - P$ flux = Wave activity flux.

一般の擾乱では $A = \frac{\overline{E}}{\overline{u} - c}$

疑問

$$\text{QG Wave activity, } A = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_y} \neq \frac{\overline{E}}{\overline{u} - c} \quad ?$$

4.4.3 QG disturbances, wave activity, energy and E-P flux

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right] + \bar{q}_y \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 , \quad (4.52)$$

Assuming $\psi'(x,y,z,t) = \Psi(y,z) \exp[ik(x-ct)]$, we get

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + n_k^2(y,z) \Psi = 0 , \quad (4.53)$$

where

$$n_k^2(y,z) = \frac{\bar{q}_y}{\bar{u} - c} - k^2 \quad : \text{ the refractive index (slowly varying),}$$

$$\bar{q}_y = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) .$$

WKB solution

$$\Psi(y,z) = \hat{\Psi}(y,z) \exp[i\chi(y,z)] , \quad (4.54)$$

$\chi(y,z)$: phase that changes rapidly,

$\hat{\Psi}(y,z)$: amplitude that changes slowly.

$l \equiv \frac{\partial \chi}{\partial y}$, $m \equiv \frac{\partial \chi}{\partial z}$: local wavenumbers in y and z directions, respectively.

$$\Psi_{yy} \cong -l^2 \Psi \text{ , } \Psi_{zz} \cong -m^2 \Psi \text{ ,}$$

(4.53)に代入し、分散公式を得る

$$\omega = k\bar{u} - \frac{k\bar{q}_y}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2} \equiv \Omega(k, l, m; y, z) \text{ .} \quad (4.55)$$

群速度 group velocity

$$c_{gx} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = c + \frac{2k^2 \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \text{ , } c_{gy} = \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{2kl \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \text{ , } c_{gz} = \frac{\partial \Omega}{\partial m} = \frac{2km \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \frac{f_0^2}{N_0^2} \text{ ,} \quad (4.56)$$

Wave activity

$$A = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\bar{q}_y} \cong \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}{\bar{q}_y} |\hat{\Psi}|^2 \text{ ,} \quad (4.57)$$

Wave energy

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \frac{1}{N_0^2} \overline{q'^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{\left(-\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2} + \frac{f_0^2}{N_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2} \right) \cong \frac{1}{4} \left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right) |\hat{\Psi}|^2, \quad (4.58)$$

Using the dispersion relation,

$$\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} = \frac{k\bar{E}}{k\bar{u} - \omega} = \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{\bar{q}_y} |\hat{\Psi}|^2.$$

Thus, at the WKB limit,

$$\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} = A. \quad (4.59)$$

$$c_{gy} A = \frac{1}{2} kl |\hat{\Psi}|^2, \quad c_{gz} A = \frac{1}{2} km \frac{f_0^2}{N_0^2} |\hat{\Psi}|^2,$$

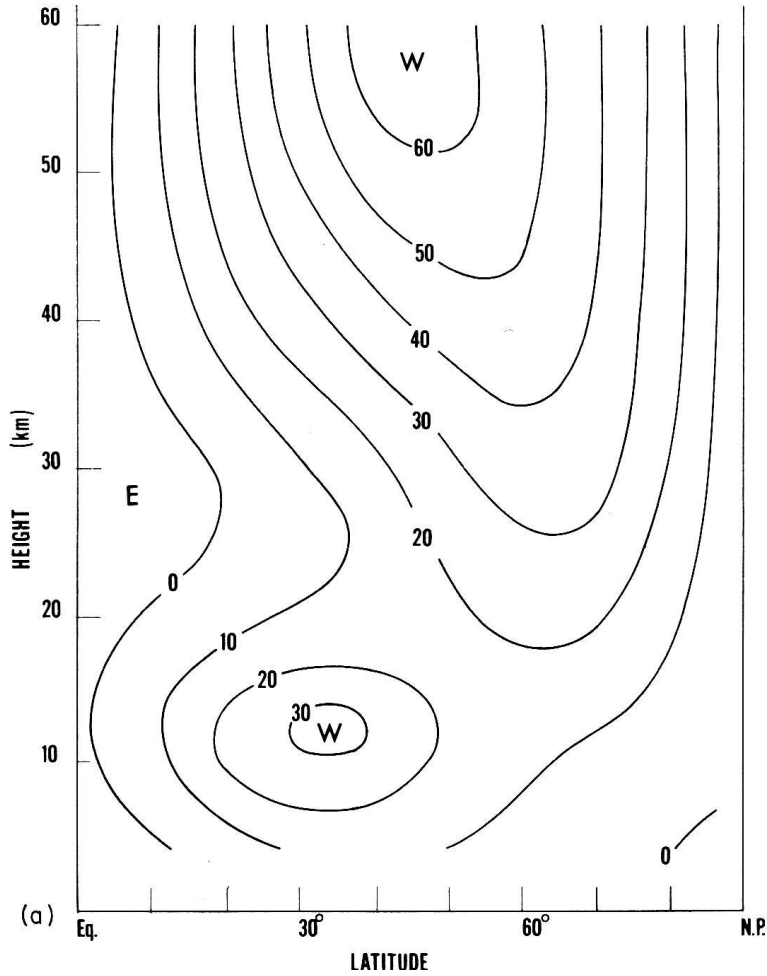
$$\mathbf{F} = \left(-\overline{u'v'}, -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) = \left(\frac{1}{2} kl |\hat{\Psi}|^2, \frac{1}{2} km \frac{f_0^2}{N_0^2} |\hat{\Psi}|^2 \right), \quad (4.60)$$

$$\mathbf{c}_g A = \mathbf{F}.$$

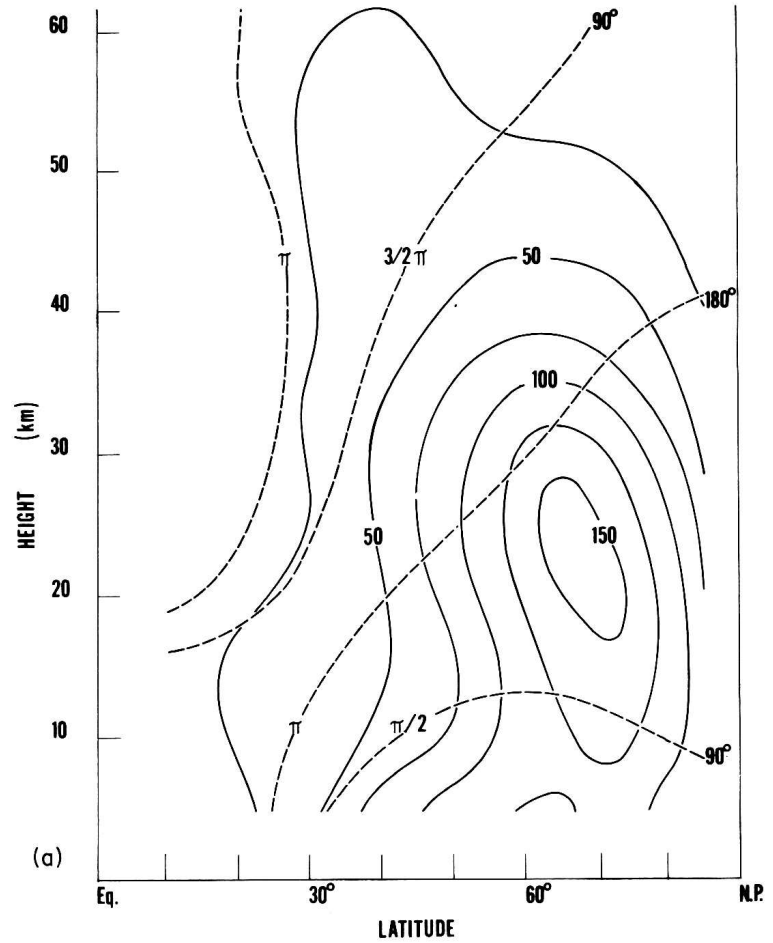
From (4.51), for the WKB disturbances,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{c}_g A) = 0, \quad \text{or} \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0, \quad (4.61) \quad \text{where} \quad \hat{\omega} = \omega - k\bar{u}.$$

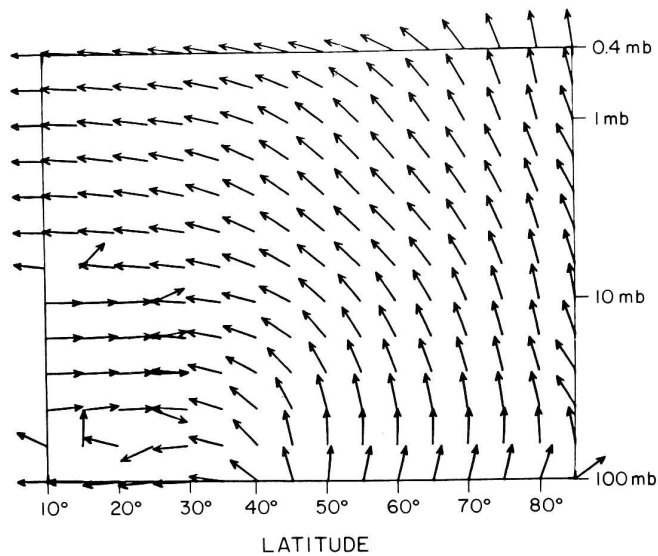
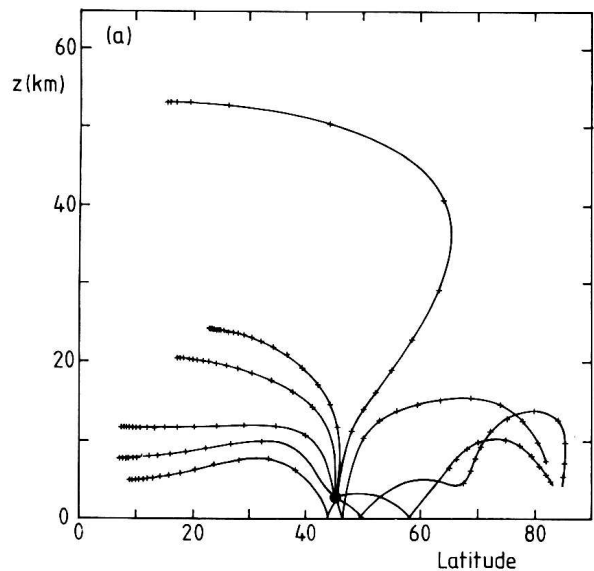
平均東西風中の定常プラネタリー波の伝播 Matsuno (1970)



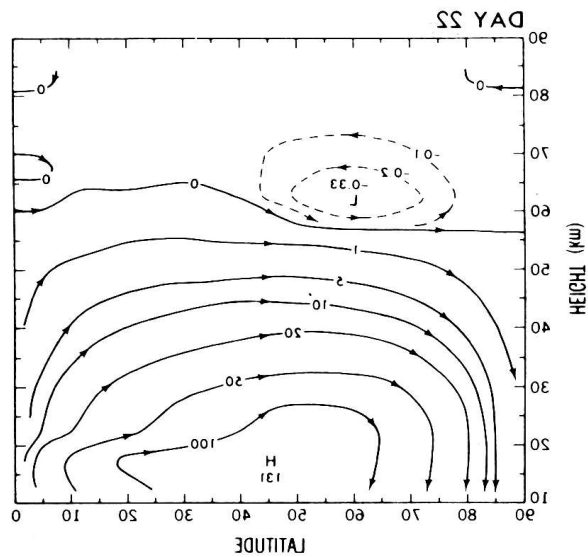
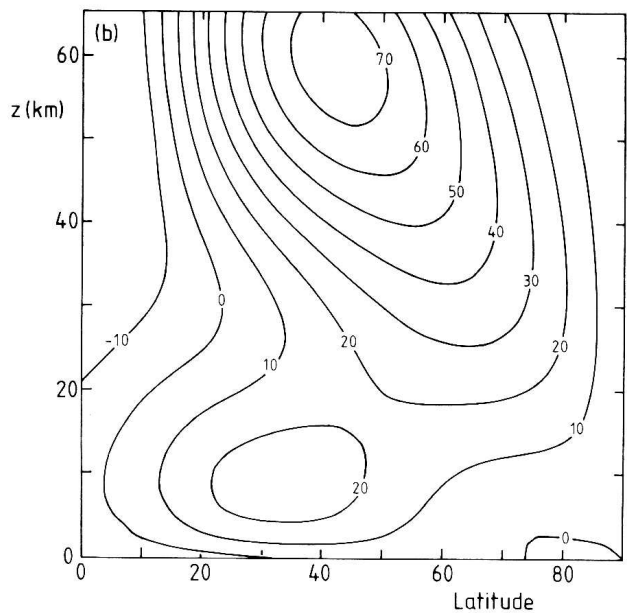
平均東西風分布



プラネタリー波の振幅と位相分布



冬の北半球E-P flux Hamilton(1982)



プラネタリー波の伝播 Karoly and Hoskins(1982)

残差循環 Dunkerton et al.(1981)

Andrews et al.(1987)より引用

DAY 22

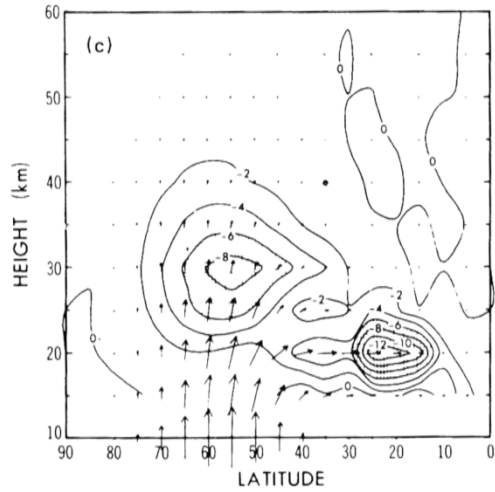


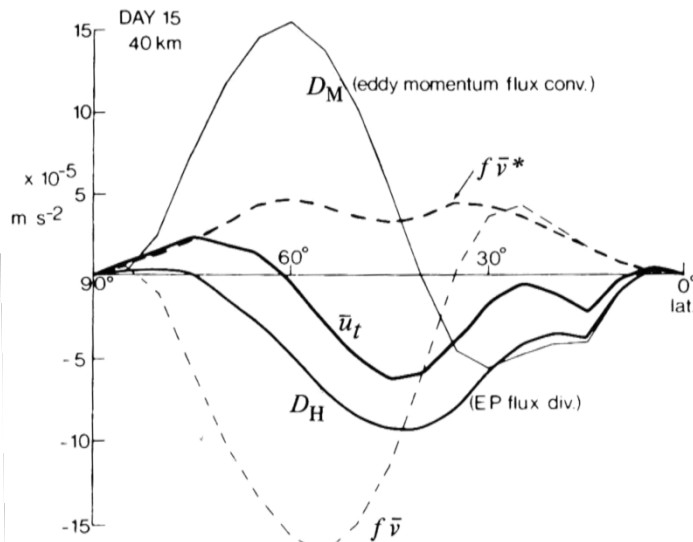
Fig. 6.13 (continued)

E-P fluxと E-P flux divergence

運動方程式中の各項の緯度分布

Dunkerton et al. (1981)

Andrews et al. (1987)より引用



第5章 3次元系への展開

これまでのE-P fluxやTEM方程式系の議論は全て、平均場は帯状平均(zonal mean)で議論してきた。これは成層圏のプラネタリー波など波数1～3等の伝播や平均場への影響を考察するには適している。しかし、対流圏の現象を考察する場合、必ずしも帯状平均と擾乱に分離することが得策ではない。対流圏では基本場そのものが海陸分布等の影響により、東西方向に一様ではないと考えるべきであろう。

このような観点からすれば、東西方向に一様ではない3次元的基本場や擾乱を考えることが自然であろう。

また、大気大循環に大きな影響を与えていることが明らかになっている内部重力波についても、その分布は東西方向に一様ではない。よって、プラネタリースケールの擾乱だけでなく、非地衡風擾乱に対しても3次元の観点からの議論が必要である。

この章では、E-P flux やTEM方程式系の3次元への拡張について述べる。ただし、3次元への拡張については一般論から、具体的にデータ解析に適した形式まで、様々な議論がなされている。ここでは、E-P fluxとTEM方程式系と密接な関連を保った議論に限って述べることとする。データ解析に適用可能な形式。

5.1 帯状平均流中の定常プラネタリー波の3次元伝播

ここでは、帯状平均流中の定常プラネタリー波の3次元伝播について、E-P fluxの3次元への拡張についてPlumb(1985)に従い述べる(ブシネスク近似に改変)。

Plumb, A. 1985: On the Three-Dimensional Propagation of Stationary Waves, JAS. 42, 217-229.

大気中にみられる定常プラネタリー波について適用可能な保存量やfluxの導出を試みる。

仮定

- ・擾乱は準地衡風のとし、擾乱は線形化された準地衡風渦位方程式に従う。
- ・擾乱は帯状平均東西風中に存在する

導出の方針

- ・QG E-P flux の場合を参考にして3次元拡張を行う。
- ・定常プラネタリー波に特化して結論を導く。

QG dynamics (in Boussinesq fluid)

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (5.1) \quad : \psi \text{ geostrophic stream function}$$

$$f_0 \frac{\partial\psi}{\partial z} = -r, \quad (5.2) \quad : \text{Hydrostatic equation}$$

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right), \quad (5.3) \quad : \text{QG potential vorticity}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = s, \quad (5.4) \quad : \text{QG potential vorticity equation, } s: \text{ non-conservative term}$$

Basic state

Zonal flow

$$U(y, z) = -\frac{\partial\Psi(y, z)}{\partial y}$$

QG potential vorticity

$$Q(y, z) = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right)$$

$$N_0 = N_0(z)$$

Perturbations

$$\psi(x, y, z, t) = \Psi(y, z) + \varepsilon\psi'(x, y, z, t) + O(\varepsilon^2), \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + U \frac{\partial q'}{\partial x} + v' Q_y = s', \quad (5.6), \quad q' \times (5.6), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{2} q'^2 \right) + v' q' Q_y = s' q', \quad (5.8)$$

$$q' = \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right), \quad (5.7)$$

QGのE-P flux, $\overline{v'q'} = \nabla \cdot \mathbf{F}$, (4.47) を参照し

$$v'q' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial B_x^R}{\partial x} + \frac{\partial B_y^R}{\partial y} + \frac{\partial B_z^R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B}^R$$

が成り立つようにベクトル \mathbf{B}^R を定義する.

$$\mathbf{B}^R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 - \frac{f_0^2}{N_0^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v'^2 - E \\ -u'v' \\ -\frac{f_0}{N_0^2} v'r' \end{pmatrix}, \quad (5.9) \quad \begin{matrix} E - P \text{ flux} \\ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -\overline{u'v'} \\ -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \end{pmatrix}, \quad (4.40) \end{matrix}$$

where

$$E = \frac{1}{2} \left(u'^2 + v'^2 + \frac{r'^2}{N_0^2} \right)$$

E-P fluxとは異なり平均操作は行っていない. E-P fluxにx成分を加えた形

Since $Q_y(y,z)$, (5.8) is written as follows;

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{q'^2}{Q_y}\right) + \nabla \cdot \mathbf{B}^R = \frac{s'q'}{Q_y}, \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) A + \nabla \cdot \mathbf{B}^R = C, \quad (5.10)'$$

$$A \equiv \left(\frac{1}{2} \frac{q'^2}{Q_y}\right), \quad C \equiv \frac{s'q'}{Q_y}.$$

Since, $U \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial AU}{\partial x} = \nabla \cdot AU$, where $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{B}^T = C, \quad (5.11)$$

where

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^R + AU. \quad (5.12)$$

The linearized QG PV equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) q' + v \bar{q}_y = s', \quad (4.49)$$

where $\bar{q}_y \equiv \frac{\partial \bar{q}}{\partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \frac{q'^2}{\bar{q}_y}\right) + \overline{v'q'} = \frac{s'q'}{\bar{q}_y}, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = D, \quad (4.51)$$

$$A \equiv \frac{1}{2} \frac{q'^2}{\bar{q}_y} : \text{QG Wave activity}$$

(5.11)は擾乱が定常であり、散逸が無い場合には $\nabla \cdot \mathbf{B}^T = 0$ (非発散) となる。しかし、何ら平均操作を行っていないので、擾乱の位相の2倍の空間的振動が残る。擾乱が振動的であれば時間平均によりこの振動は消えるが、定常擾乱では時間平均は意味をなさない。

定常擾乱については、この振動を消すことが可能である。

形式的に $\mathbf{F}_s = \mathbf{B}^T + \mathbf{G}$ と置くと, (5.11)は

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C + \nabla \cdot \mathbf{G} = C_s, \quad (5.13)$$

$\nabla \cdot \mathbf{G}$ が, 擾乱が散逸的である場合にのみ発散が残るように \mathbf{G} を選択する

A suitable choice of \mathbf{G}

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \psi'^2}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'^2}{\partial z} \right) - \frac{2b'q'}{Q_y} \\ - \frac{\partial^2 \psi'^2}{\partial x \partial y} \\ - \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial^2 \psi'^2}{\partial x \partial z} \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{b'q'}{Q_y} \right), \quad (5.15)$$

where

$$\frac{\partial b'}{\partial x} = s'.$$

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{B}^T + \mathbf{G} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \psi' q' + \frac{(Uq'^2 - b'q')}{Q_y} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \frac{f_0^2}{N_0^2} \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

(5.16)はfluxに散逸項を含んでおり、不適当な選択のように思われるが、定常擾乱について変形を行うと、この部分は消去できることを次ぎに示す。

For a stationary disturbance from (5.6)

$$U \frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial x} Q_y = \frac{\partial b'}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (Uq' + \psi'Q_y - b') = 0, \text{ because of } U(y,z) \text{ and } Q(y,z).$$

$$Uq' + \psi'Q_y - b' = \text{const.} = 0, \text{ because for disturbances } \int q'dx = \int \psi'dx = \int b'dx = 0.$$

Multiplying q'/Q_y , we get

$$\psi'q' + \frac{(Uq'^2 - b'q')}{Q_y} = 0. \quad (5.17)$$

$$\mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} \right) \end{array} \right), \quad (5.18) \quad \text{and} \quad C_s = \frac{q's' - \frac{1}{2} \frac{\partial b'q'}{\partial x}}{Q_y}. \quad (5.19)$$

\mathbf{F}_s and C_s consists of disturbances and dissipation terms, respectively.

For stationary disturbances,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C_s ,$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{q'^2}{Q_y} , \quad \mathbf{F}_s = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} \right) \end{pmatrix} , \quad \text{and} \quad C_s = \frac{q' s' - \frac{1}{2} \frac{\partial b' q'}{\partial x}}{Q_y} .$$

We consider the WKB limit of almost steady weakly dissipating, slowly varying QG waves,

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z) , \quad (5.20)$$

χ : phase function, and the local wavenumbers are defined as follows;

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x} , \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y} , \quad m = \frac{\partial \chi}{\partial z} , \quad (5.21)$$

$$F_{sx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} \right] \cong \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 [k^2 \cos^2 \chi + k^2 \sin^2 \chi] = \frac{1}{2} k^2 \hat{\Psi}^2$$

$$F_{sy} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial y} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial y} \right] \cong \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 [kl \cos^2 \chi + kl \sin^2 \chi] = \frac{1}{2} kl \hat{\Psi}^2$$

$$F_{sz} = \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{N_0^2} \left[\frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial z} - \psi' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x \partial z} \right] \cong \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 [km \cos^2 \chi + km \sin^2 \chi] = \frac{1}{2} km \frac{f_0^2}{N_0^2} \hat{\Psi}^2$$

$$\mathbf{F}_s \cong \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix} . \quad (5.22)$$

The group velocity of QG waves,

$$c_{gx} = \frac{\partial \Omega}{\partial k} = c + \frac{2k^2 \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}, \quad c_{gy} = \frac{\partial \Omega}{\partial l} = \frac{2kl \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}, \quad c_{gz} = \frac{\partial \Omega}{\partial m} = \frac{2km \bar{q}_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \frac{f_0^2}{N_0^2}, \quad (4.56)$$

in the present stationary case,

$$c_{gx} = \frac{2k^2 Q_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}, \quad c_{gy} = \frac{2kl Q_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}, \quad c_{gz} = \frac{2km Q_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \frac{f_0^2}{N_0^2}. \quad (5.53)$$

$$\mathbf{c}_g = \frac{2Q_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix}, \quad (5.54) \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_s \equiv \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2\right)^2}{Q_y} \hat{\Psi}^2 \mathbf{c}_g. \quad (5.55)$$

\mathbf{F}_s is parallel to \mathbf{c}_g , but $\mathbf{F}_s \neq A \mathbf{c}_g$. Note that $A = \frac{1}{2} \frac{q'^2}{Q_y}$ is phase-dependent in the WKB limit.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C_s \neq \frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (A \mathbf{c}_g).$$

Is it possible to find a wave activity which satisfies,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = C_s, \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_s = A \mathbf{c}_g ?$$

At the WKB limit, $\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} = A$, (4.59) in the present steady case $c = 0$, $\frac{\bar{E}}{\bar{u}} = A$.

$$A_s \equiv \frac{1}{2} \left(A + \frac{E}{U} \right), \quad (5.56)$$

and for stationary waves $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{U} \right) = 0$, thus $\frac{\partial A_s}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}$.

$$A_s \equiv \frac{1}{2} \left(A + \frac{E}{U} \right) = \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(-k^2 - l^2 - \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \sin^2 \chi + \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)}{U} \cos^2 \chi.$$

For stationary waves $\omega = 0$, from the dispersion relation

$$\omega = k\bar{u} - \frac{k\bar{q}_y}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2}, \quad (4.55) \quad \frac{1}{U} = \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)}{Q_y},$$

$$A_s = \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \sin^2 \chi + \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \cos^2 \chi = \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y}.$$

$$A_s \mathbf{c}_g = \frac{1}{4} \hat{\Psi}^2 \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \frac{2Q_y}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2} \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_s$$

$$\frac{\partial A_s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_s = \frac{\partial A_s}{\partial t} + \nabla \cdot (A_s \mathbf{c}_g) = C_s \quad (5.57)$$

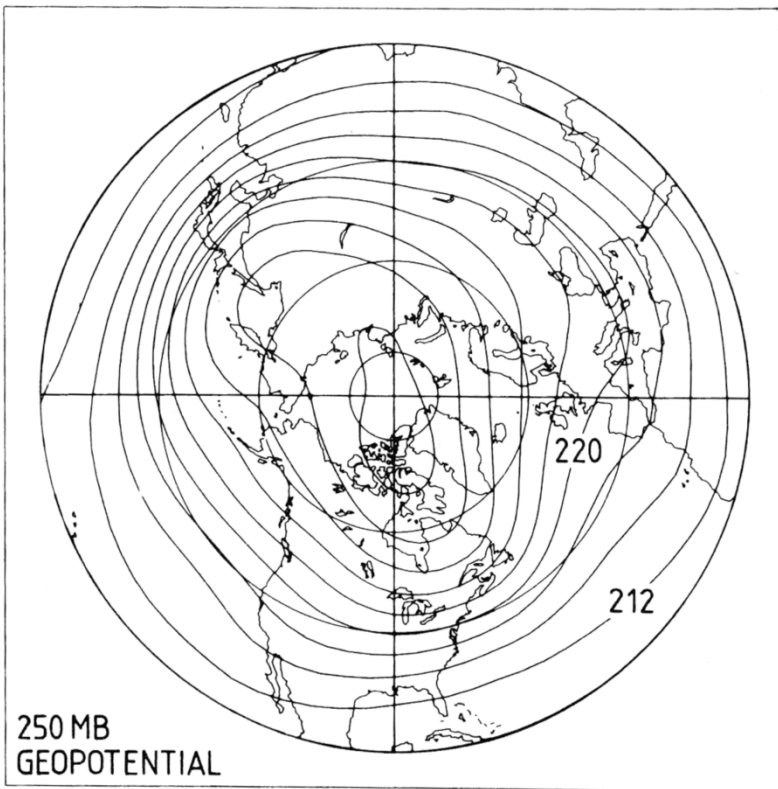
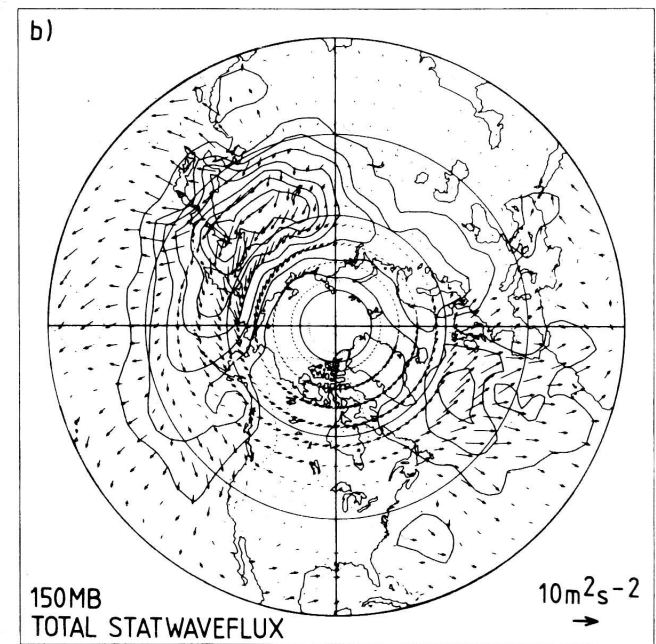
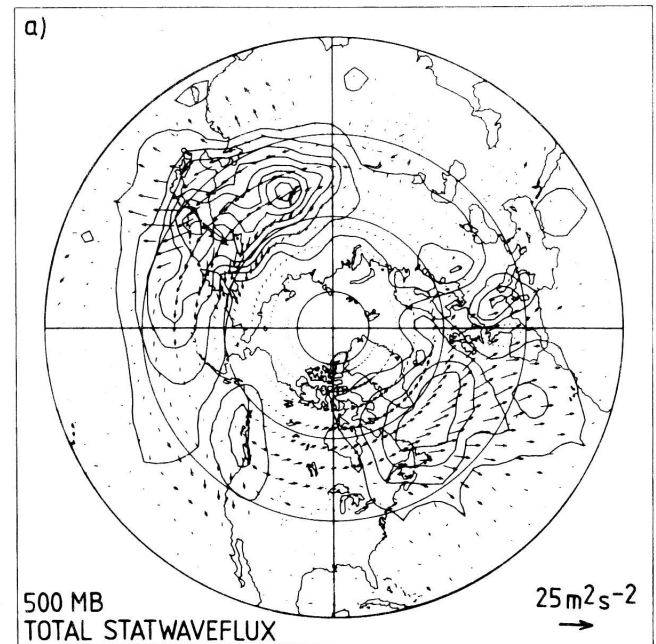
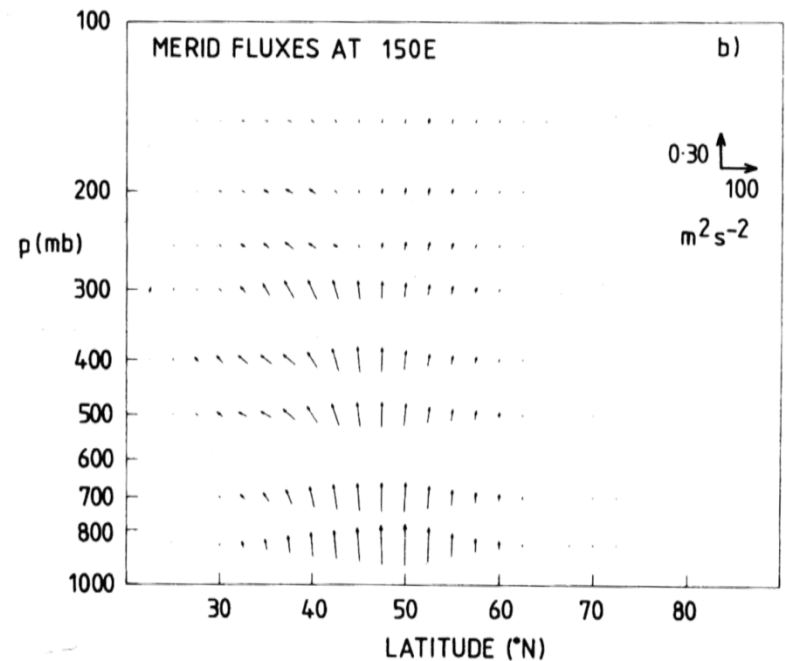
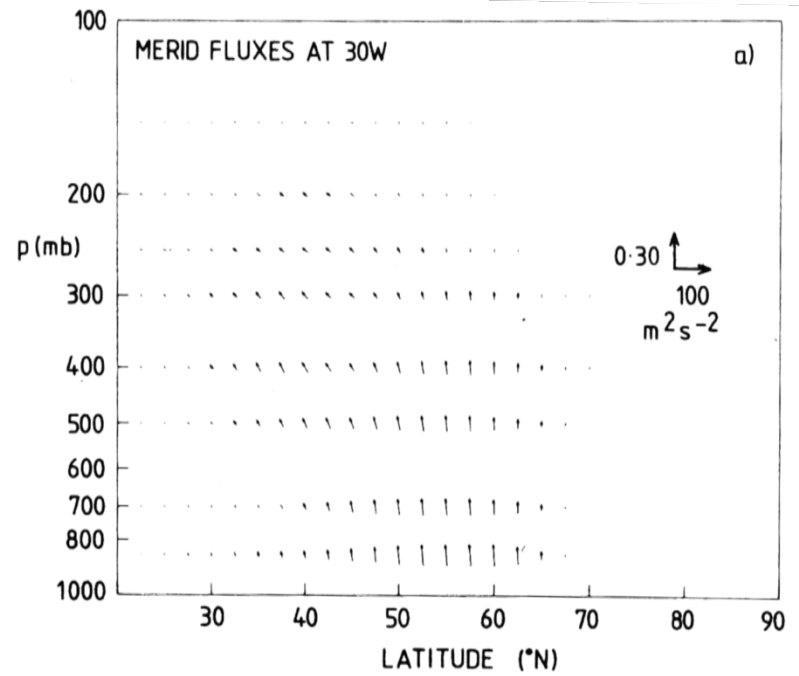
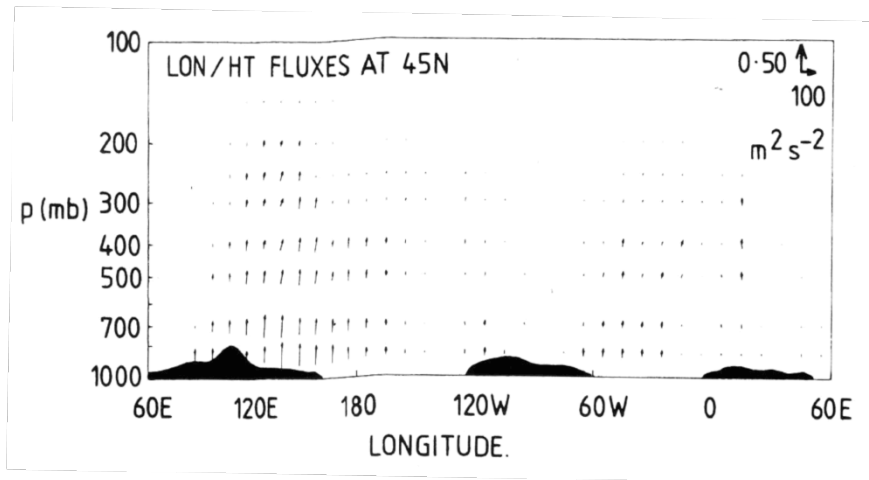


FIG. 3. Time-mean geopotential height field (dam) for northern winter as determined by the data set analyzed in Section 7.

250hPa面での時間平均geopotential height
時間平均場中での定常プラネタリー波の分布と
Activity flux F_s の分布

Plumb(1985)





Fsの経度-高度分布および緯度高度分布

Plumb(1985)

5.2 平均流中の非定常準地衡風擾乱の3次元伝播

5.1では平均帯状流中の定常プラネタリー波の3次元伝播についてPlumb(1985)に従い説明したが、この節では時間平均された基本場中の非定常QG擾乱の3次元伝播について説明する。

Plumb (1986): Three-Dimensional Propagation of Transient Quasi-Geostrophic Eddies and Its Relationship with the Eddy Forcing of the Time-Mean Flow, JAS, 43, 1657-1678.

ここでも説明の簡単化のためにブシネスク近似を用いる。

大気中にみられる非定常プラネタリー波について適用可能な保存量やfluxの導出、平均場への影響の表現等を試みる。

仮定

- ・ 擾乱は準地衡風のとし、擾乱は線形化された準地衡風渦位方程式に従う。
- ・ 擾乱は時間平均された平均流 $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ 中に存在する。

Definition of the time – mean

$$\bar{a}(x,y,z) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau a(x,y,z,t) dt \quad . \quad (5.58)$$

Definition of the disturbance

$$a'(x,y,z,t) = a(x,y,z,t) - \bar{a}(x,y,z) \quad . \quad (5.59)$$

QG potential vorticity

$$q = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) , \quad (5.60)$$

QG potential vorticity equation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = s \quad , \quad (5.61) \quad s: \text{ non – conservative term}$$

Linearized form

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = s' \quad , \quad (5.61)$$

or

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q'}{\partial y} + \mathbf{u}' \cdot \nabla_H \bar{q} = s' \quad . \quad (5.61)' \quad \nabla_H = \left(\frac{\partial}{\partial x} , \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \quad , \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \quad , \quad r' = -f_0 \frac{\partial \psi'}{\partial z}$$

Form (5.61) or (5.61)' ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + \overline{u'q'} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \overline{v'q'} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = \overline{s'q'} , \quad (5.62)$$

or

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + \overline{\mathbf{u}'q'} \cdot \nabla_H \bar{q} = \overline{s'q'} . \quad (5.62)'$$

Plumb(1985) $v'q' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial B_x^R}{\partial x} + \frac{\partial B_y^R}{\partial y} + \frac{\partial B_z^R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{B}^R$ を拡張し,

$$\overline{u'q'} = - \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\}} = \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{xz}}{\partial z} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_x , \quad (5.63)$$

$$\overline{v'q'} = \overline{\frac{\partial \psi'}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right) \right\}} = \frac{\partial B_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial z} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_y , \quad (5.64)$$

となる B を定義する.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\frac{\overline{\partial \psi' \partial \psi'}}{\partial x \partial y} & \bar{E} - \left(\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2 & -\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\overline{\partial \psi' \partial \psi'}}{\partial y \partial z} \\ \left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2 - \bar{E} & \frac{\overline{\partial \psi' \partial \psi'}}{\partial y \partial x} & \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\overline{\partial \psi' \partial \psi'}}{\partial x \partial z} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u'v'} & \bar{E} - \overline{u'^2} & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{u'r'} \\ \overline{v'^2} - \bar{E} & -\overline{u'v'} & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad (5.65)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left[\overline{\left(-\frac{\partial \psi'}{\partial y} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial x} \right)^2} + \frac{f_0^2}{N_0^2} \overline{\left(\frac{\partial \psi'}{\partial z} \right)^2} \right] = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \frac{1}{N^2} \overline{r'^2} \right) .$$

このBを使用して(5.62)を表すと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot (\nabla_H \bar{q}) = \overline{s'q'} . \quad (5.66)$$

E-P flux や Plumb(1986)の場合には, (5.66)を保存則の形, (4.50), (5.10)に変形できたが, 基本場が時間平均場で, 東西流および南北流がある場合には, (5.66)を保存則の形には変形できない. E-P flux や Plumb(1986)の場合には, 基本場がx方向に並進対称性を持つため, 保存則が存在した.

空間の並進対称性：運動量保存則（擬運動量保存則）

ここで対象としている系では, 基本場の特性のため並進対称性が存在しない.

しかし基本場が擾乱場に比較して空間的に「ゆっくり変化」している場合には, 近似的に保存則が導かれる（擾乱は線形）.

Bretherton and Garrett, 1969: Waves in inhomogeneous moving media.
Proc. Roy. Soc. A. 302, 529-554.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0 , \quad (5.67)$$

where $\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$, \bar{E} , $\hat{\omega}$, \mathbf{c}_g are wave action density, energy density, the intrinsic frequency, and the group velocity, respectively.

ここで対象としている系でWKB的な場合を考える.

(5.66) can be written,

$$\frac{1}{|\nabla_H \bar{q}|} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + \mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \frac{\overline{s'q'}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad (5.68)$$

where

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_H \bar{q}}{|\nabla_H \bar{q}|}. \quad (5.69)$$

Assuming that the basic QG potential vorticity gradient is slowly varying, we may write,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{|\nabla_H \bar{q}|} \right) + \nabla \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = \frac{\overline{s'q'}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad (5.68)'$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = S_M, \quad (5.70)$$

where

$$M = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad \text{and} \quad S_M = \frac{\overline{s'q'}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad \text{and} \quad \mathbf{M}_R = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} n_x B_{xx} + n_y B_{yx} \\ n_x B_{xy} + n_y B_{yy} \\ n_x B_{xz} + n_y B_{yz} \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

(5.70)は基本場が非散逸で近似できる場合には、 \mathbf{M}_R は簡単に表現できる。

Approximately conservative basic state, $\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla_H \bar{q} \cong 0$.

$\mathbf{n} \cong (-\bar{v}, \bar{u})/|\bar{\mathbf{u}}|$, if the mean flow is pseudoeastward,

$$\mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\bar{\mathbf{u}}|} \begin{bmatrix} \bar{u}(\overline{v'^2} - \bar{E}) - \bar{v}\overline{u'v'} \\ \bar{v}(\overline{u'^2} - \bar{E}) - \bar{u}\overline{u'v'} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2}(\bar{v}\overline{u'r'} - \bar{u}\overline{v'r'}) \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Utilizing $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, (5.70) may be written

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_T = S_M, \quad (5.73)$$

where

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_R + \bar{\mathbf{u}}M. \quad (5.74)$$

Under the WKB limit,

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{c}_g M. \quad (5.75)$$

(5.73), (5.74)は M とそのflux M_T による
 M の保存則の形式で表現されている。

From (5.74) and (5.75), $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_T - \bar{\mathbf{u}}M = (\mathbf{c}_g - \bar{\mathbf{u}})M = \hat{\mathbf{c}}_g M$,

where $\hat{\mathbf{c}}_g \equiv \mathbf{c}_g - \bar{\mathbf{u}}$: intrinsic group velocity.

平均流 $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v})$ 中のPlanetary wave

Linearized QG equation

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial q'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial q'}{\partial y} + u' \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad (5.61)'$$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x}, \quad q' = \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \psi'}{\partial z} \right), \quad (5.60)'$$

$$\bar{q} = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right) = f_0 + \beta y - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right), \quad (5.60)''$$

We assume following WKB solution,

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t). \quad (5.76) \quad \hat{\Psi}(x, y, z, t): \text{ slowly varying}$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = l, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = m, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\omega; \quad \text{locally defined wavenumbers and frequency}$$

Dispersion relation

$$\omega = k\bar{u} + l\bar{v} - \frac{k\bar{q}_y - l\bar{q}_x}{K^2}, \quad \text{where} \quad K^2 = k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2, \quad (5.77)$$

and

$$\bar{q}_y = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right), \quad \bar{q}_x = -\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right).$$

Group velocity

$$\mathbf{c}_g = (c_{gx}, c_{gy}, c_{gz}) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m} \right)$$

$$c_{gx} = \bar{u} - \frac{\bar{q}_y}{K^2} + 2k \frac{k\bar{q}_y - l\bar{q}_x}{K^4}$$

$$c_{gy} = \bar{v} + \frac{\bar{q}_x}{K^2} + 2l \frac{k\bar{q}_y - l\bar{q}_x}{K^4} . \quad (5.78)$$

$$c_{gz} = 2m \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{k\bar{q}_y - l\bar{q}_x}{K^4}$$

$$M = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}^2}{|\nabla_H \bar{q}|} = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}^2}{\sqrt{\bar{q}_x^2 + \bar{q}_y^2}} \quad \text{と (5.72), (5.74), (5.78) より}$$

Under the WKB limit,

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{c}_g M . \quad (5.75)$$

を容易に示すことができる。

QG擾乱が時間平均場に及ぼす効果の表現

- QG擾乱の活動度fluxを定義することができた。
- この活動度fluxを用いて、QG擾乱が時間平均場に及ぼす効果を表現することを試みる

ブシネスク近似下の平均場の方程式

$$\frac{\partial \rho_m \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} + \rho_m \bar{\Phi} \delta_{ij}) = -\rho_m \bar{r} \mathbf{k} - \nabla \cdot (\rho_m \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{r} \bar{\mathbf{v}}) - N^2 \bar{w} = -\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' r'}), \quad (2.20)$$

$$-\nabla \cdot (\rho_m \overline{\mathbf{v}' \mathbf{v}'}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_m \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{u'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_m \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{v'w'}}{\partial z} \\ \frac{\partial \rho_m \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_m \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho_m \overline{w'w'}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$-\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}' r'}) = - \left(\frac{\partial \overline{u' r'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v' r'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w' r'}}{\partial z} \right)$$

これを、回転系でのQG平均場・擾乱場に適用する

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v} &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \right), \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \bar{u} &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} \right), \\
\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N_0^2 \bar{w} &= J - \left(\frac{\partial \overline{u'r'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'r'}}{\partial y} \right),
\end{aligned} \tag{5.76}$$

where J denotes external heating rate, and the hydrostatic approximation is assumed.

これをTEM方程式系に倣って、Residual circulation的なものを定義して変形する

$$\begin{aligned}
\bar{u}^* &= \bar{u} + \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{S}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{u'r'}}{N_0^2} \right), \\
\bar{v}^* &= \bar{v} - \frac{1}{f} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\overline{v'r'}}{N_0^2} \right), \\
\bar{w}^* &= \bar{w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\overline{u'r'}}{N_0^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{v'r'}}{N_0^2} \right),
\end{aligned} \tag{5.77}$$

where

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} - \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right).$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v}^* &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{u}^2 - \bar{v}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) \right\} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \bar{v}'r' \right) \right], \\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \bar{u}^* &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - \left[\frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{v}^2 - \bar{u}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \bar{u}'r' \right) \right], \\
\frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N_0^2 \bar{w}^* &= J.
\end{aligned} \tag{5.78}$$

右辺の擾乱の2次のストレス項のテンソルFによる表現

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{F})_x &= - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{u}^2 - \bar{v}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) \right\} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \bar{v}'r' \right) \right], \\
(\nabla \cdot \mathbf{F})_y &= - \left[\frac{\partial \bar{v}'u'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{v}^2 - \bar{u}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0}{N_0^2} \bar{u}'r' \right) \right],
\end{aligned}$$

where

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\bar{u}^2 - \bar{v}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) & \bar{u}'v' & \frac{f_0}{N_0^2} \bar{v}'r' \\ \bar{v}'u' & \frac{1}{2} \left(\bar{v}^2 - \bar{u}^2 + \frac{\bar{r}^2}{N_0^2} \right) & -\frac{f_0}{N_0^2} \bar{u}'r' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.79}$$

テンソルFと3次元QG fluxとの関係

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \overline{u'v'} & \overline{E} - \overline{u'^2} & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{u'r'} \\ \overline{v'^2} - \overline{E} & -\overline{u'v'} & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u'v'} & \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} - \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right) & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{u'r'} \\ -\overline{u'v'} & -\overline{u'v'} & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.65)'$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right) & \overline{u'v'} & \frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \\ \overline{v'u'} & \frac{1}{2} \left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right) & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{u'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ -B_{xx} & -B_{xy} & -B_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{F})_x = (\nabla \cdot \mathbf{B})_y, \quad (\nabla \cdot \mathbf{F})_y = -(\nabla \cdot \mathbf{B})_x. \quad (5.81)$$

$$\overline{u'q'} = -\frac{\partial\psi'}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial B_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{xz}}{\partial z} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_x, \quad (5.63)$$

$$\overline{v'q'} = \frac{\partial\psi'}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi'}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{\partial\psi'}{\partial z} \right) \right\} = \frac{\partial B_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial B_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial B_{yz}}{\partial z} = (\nabla \cdot \mathbf{B})_y, \quad (5.64)$$

を利用すると(5.78)は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - f \bar{v}^* &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \overline{v'q'}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + f \bar{u}^* &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - \overline{u'q'}, \\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial y} - N_0^2 \bar{w}^* &= J. \end{aligned} \quad (5.82)$$

From (5.74) and (5.75), $\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_T - \bar{\mathbf{u}}M = (\mathbf{c}_g - \bar{\mathbf{u}})M = \hat{\mathbf{c}}_g M$,

where $\hat{\mathbf{c}}_g \equiv \mathbf{c}_g - \bar{\mathbf{u}}$: intrinsic group velocity.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_H \bar{q}}{|\nabla_H \bar{q}|}. \quad (5.69)$$

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} n_x B_{xx} + n_y B_{yx} \\ n_x B_{xy} + n_y B_{yy} \\ n_x B_{xz} + n_y B_{yz} \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

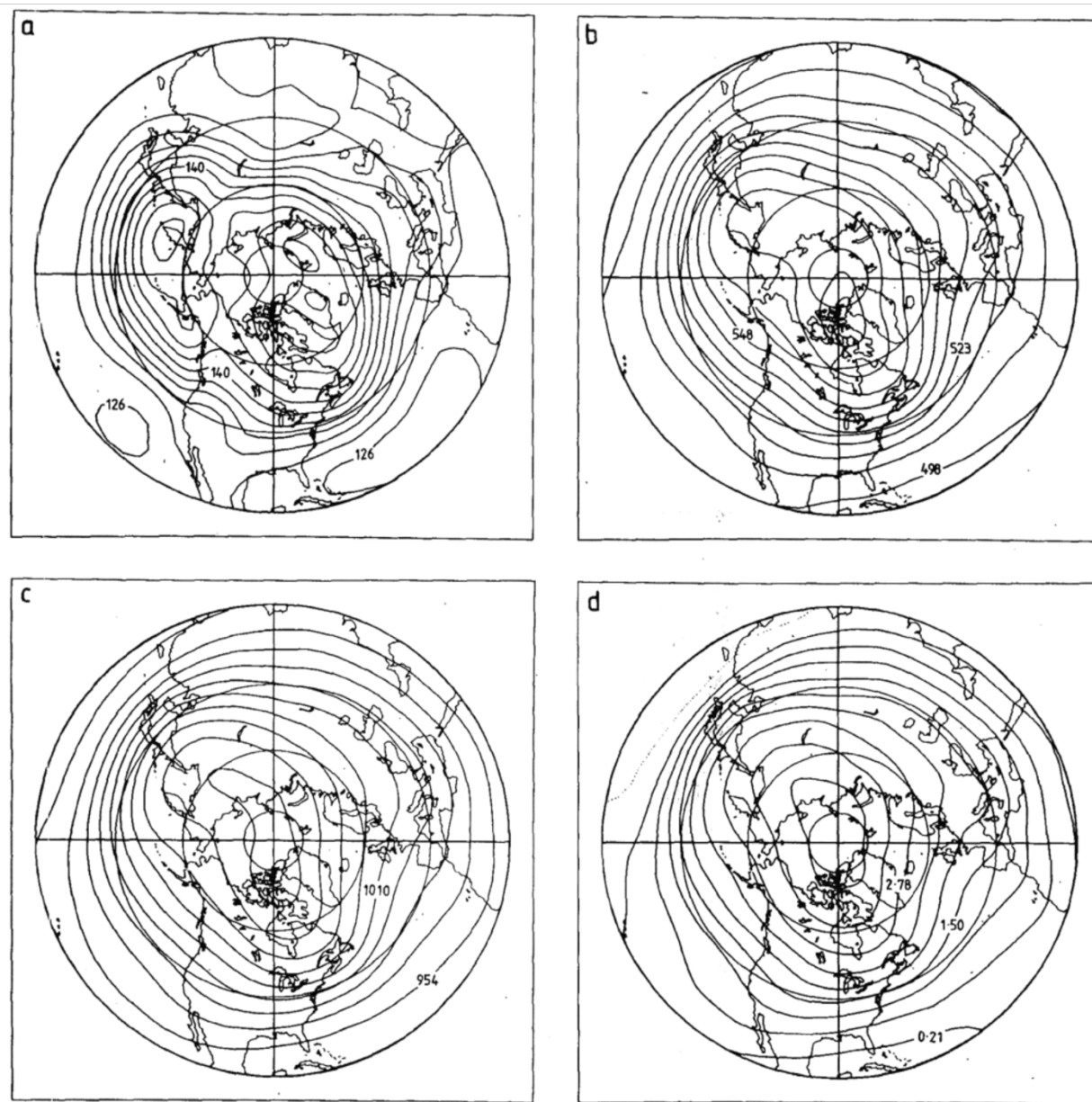
FとQG E-P flux の関係

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} - \overline{v'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right) & \overline{u'v'} & \frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \\ \overline{v'u'} & \frac{1}{2} \left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2} + \frac{\overline{r'^2}}{N_0^2} \right) & -\frac{f_0}{N_0^2} \overline{u'r'} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.79)$$

QG E - P flux :

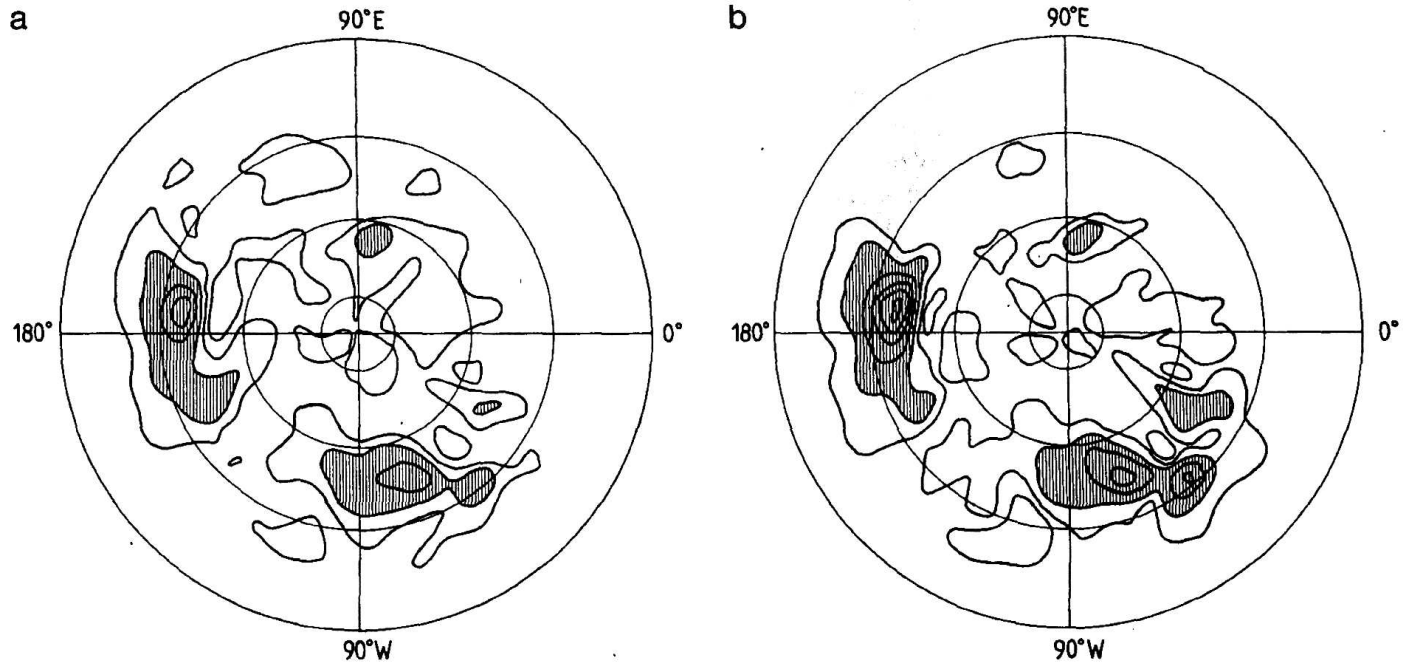
$$\mathbf{F} = - \left(\overline{u'v'}, \frac{f_0}{N_0^2} \overline{v'r'} \right) \quad (4.40)$$

FはQG E-P flux の3次元拡張になっていることが分かる。



時間平均場
 geopotential height
 a: 850hPa
 b: 500hPa
 c: 250hPa
 d: 250hPaの
 quasi-geostrophic PV
 Plumb(1986)

FIG. 1. Time-averaged structure of the Northern Hemisphere winter flow. Mean geopotential height (dam) at (a) 850 mb, (b) 500 mb and (c) 250 mb; (d) Mean quasi-geostrophic potential vorticity (10^{-4} s^{-1}) at 250 mb.



Slowly varying assumptionの検討

$$\frac{1}{|\nabla_H \bar{q}|} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + \mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B}) = \frac{\overline{s'q'}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad (5.68)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = S_M, \quad (5.70)$$

$\mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{B})$ and $\nabla \cdot \mathbf{M}_R$ の比較

Plumb(1986)

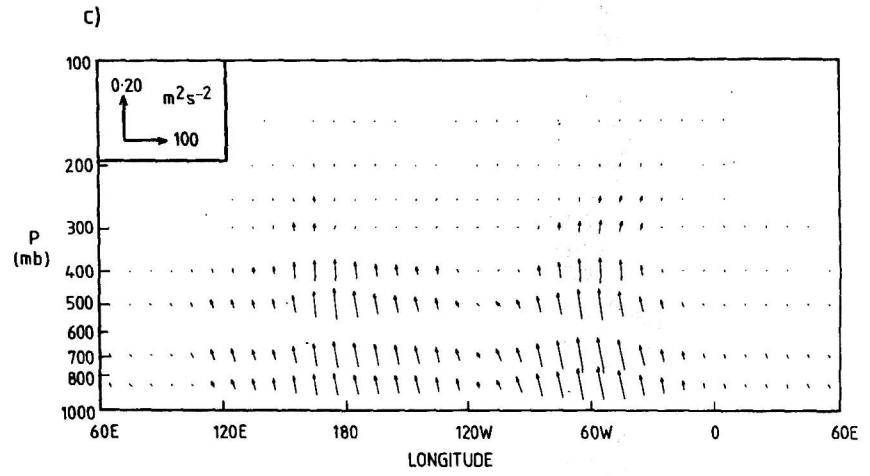
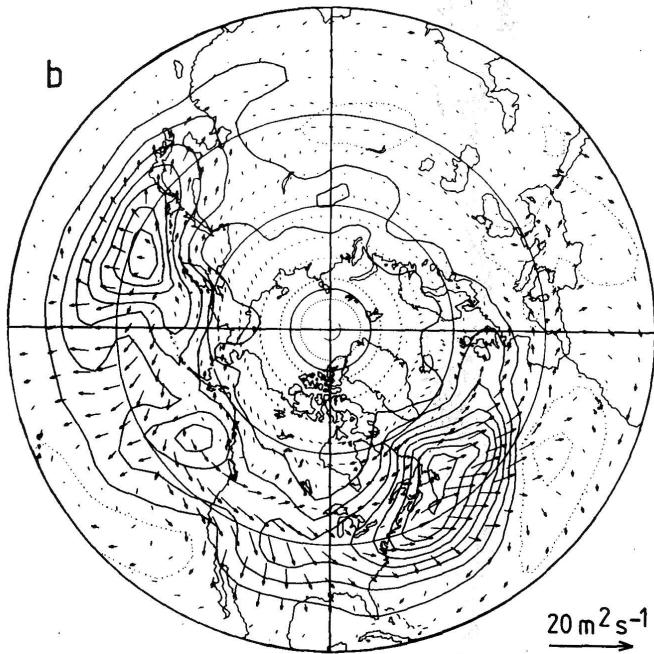
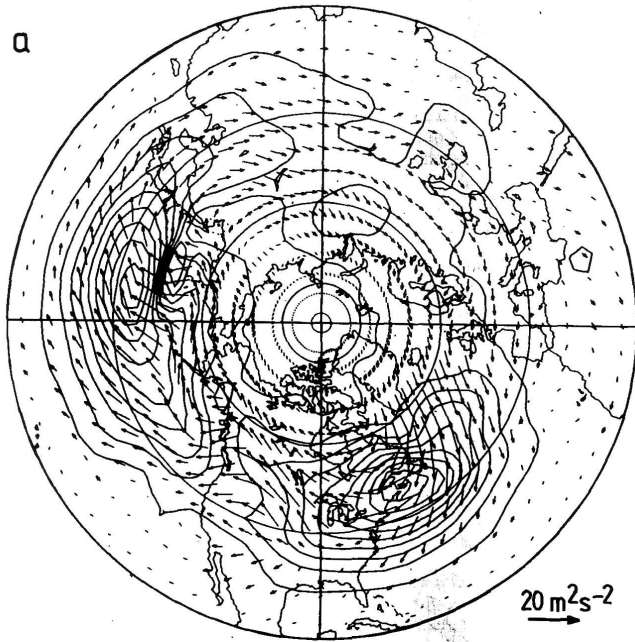


FIG. 3. (Continued)

2.5 – 6 days 成分

Geopotential height

M_R 分布

Plumb(1986)

FIG. 3. Radiative eddy activity flux M_R for the BP eddies. Horizontal projections at (a) 500 and (b) 250 mb. Arrows: horizontal component. Note that the horizontal fluxes are mapped onto the polar stereographic projection according to Eq. (3.3). Scale on lower right is correct for M_R

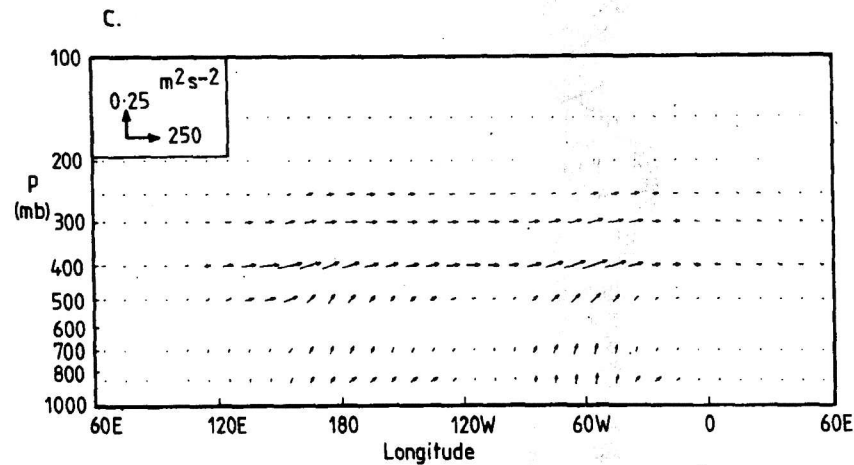
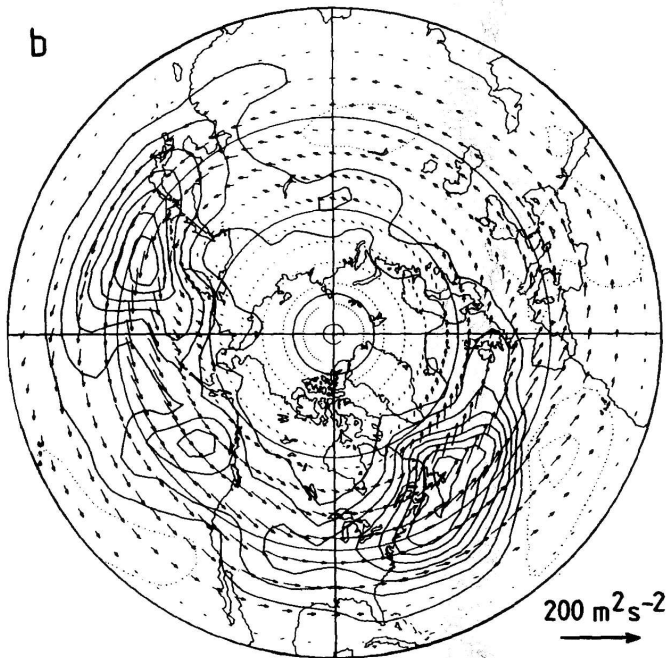
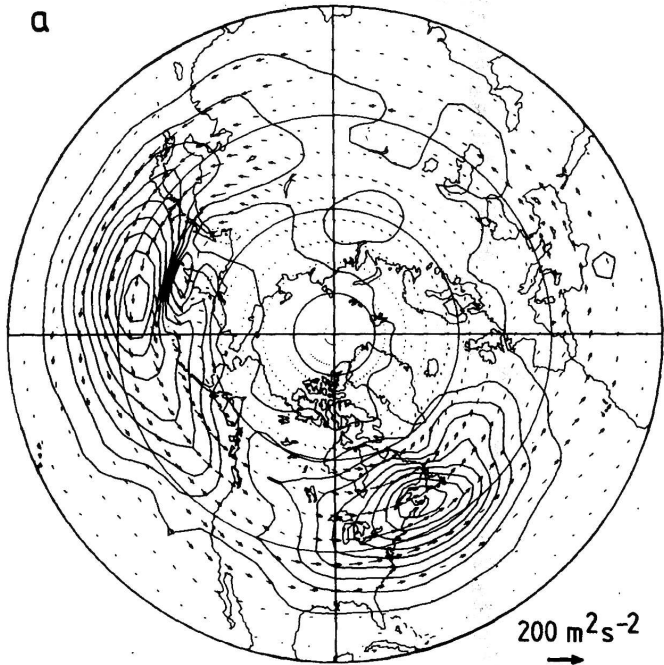


FIG. 7. (Continued)

2.5 – 6 days 成分

Geopotential height

M_T 分布

Plumb(1986)

FIG. 7. Total eddy activity flux M_T for the BP eddies. Otherwise as Fig. 2, with contour intervals: (a) $\Delta = 0.0139 m^2 s^{-2}$, (b) $\Delta = 0.00357 m^2 s^{-2}$.

5.3 平均流中の非定常準地衡風擾乱の3次元伝播 Phase-Independent Wave-Activity Fluxの定式化

5.2では平均帯状流中のプラネタリー波の3次元伝播についてPlumb(1986)に従い説明した。ここでは、波動擾乱の2次の項の直流成分は時間平均により抽出した。この節では基本場中の非定常QG擾乱の3次元伝播について、時間平均を必要としないWave-activity flux (Takaya and Nakamura, 2001)について説明する。

Takaya and Nakamura (2001): A Formulation of a Phase-Independent Wave-Activity Flux for Stationary and Migratory Quasigeostrophic Eddies on a Zonally Varying Basic Flow, JAS, 58, 608-627.

説明の簡単化のためにブシネスク近似を用いる。

Takaya and Nakamura では詳細な式の導出がなされているが、ここでは簡単化のためにPlumb (1985, 1986)の結果を参照しながら、Phase-Independent Wave-Activity Fluxの定式化について説明する。

仮定

- 擾乱は準地衡風のとし、擾乱は線形化された準地衡風渦位方程式に従う。
- 擾乱は東西方向に変化する基本場 $\mathbf{U} = (U, V)$ 中に存在する。
- 基本場 $\mathbf{U} = (U, V)$ は非散逸的である。

$$\mathbf{U} \cdot (\nabla_H Q) \equiv 0, \quad (5.83) \quad \text{or} \quad \frac{Q_y}{|\nabla_H Q|} = \frac{U}{|\mathbf{U}|} \quad \text{and} \quad \frac{Q_x}{|\nabla_H Q|} = -\frac{V}{|\mathbf{U}|},$$

$$\text{where } Q(x, y, z) = f_0 + \beta y + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right). \quad (5.84)$$

Plumb (1986)の結果

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = S_M, \quad (5.70)$$

where

$$M = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{|\nabla_H \bar{q}|}, \quad \text{and} \quad S_M = \frac{\overline{s'q'}}{|\nabla_H \bar{q}|},$$

$$\mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\bar{\mathbf{u}}|} \begin{bmatrix} \bar{u}(\overline{v'^2} - \bar{E}) - \bar{v} \overline{u'v'} \\ \bar{v}(\overline{u'^2} - \bar{E}) - \bar{u} \overline{u'v'} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (\bar{v} \overline{u'r'} - \bar{u} \overline{v'r'}) \end{bmatrix}. \quad (5.72)$$

Utilizing $\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0$, (5.70) may be written

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_T = S_M, \quad (5.73)$$

where

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_R + \bar{\mathbf{u}}M. \quad (5.74)$$

上記結果は、非一様な時間平均場（非散逸的）中のQG擾乱の2次の項の時間平均により記述されている。

しかし、QG擾乱がstationaryな場合には、時間平均により直流成分を得ることはできない。Plumb (1985)に倣い擾乱の位相を消去することが可能。

Plumb (1985)

$$A_s \equiv \frac{1}{2} \left(A + \frac{E}{U} \right), \quad (5.56)$$

$$A \equiv \left(\frac{1}{2} \frac{q'^2}{Q_y} \right)$$

and for stationary waves $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{U} \right) = 0$, thus $\frac{\partial A_s}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t}$.

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t),$$

where $\hat{\Psi}(x, y, z, t)$: slowly varying function,

$\sin \chi(x, y, z, t)$: locally sinusoidal WKB solution.

For stationary waves $\omega = 0$, from the dispersion relation

$$\omega = k\bar{u} - \frac{k\bar{q}_y}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2}, \quad (4.55) \quad \frac{1}{U} = \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)}{Q_y},$$

$$A_s = \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \hat{\Psi}^2 \sin^2 \chi + \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \hat{\Psi}^2 \cos^2 \chi = \frac{1}{4} \frac{\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2 \right)^2}{Q_y} \hat{\Psi}^2.$$

$\cos^2 \chi + \sin^2 \chi = 1$ を利用して波動擾乱の位相を消すことが可能。

時間平均をとらずにPlumb(1986)を表現する

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = S_M, \quad (5.85)$$

where

$$M = \frac{1}{2} \frac{q'^2}{|\nabla_H Q|}, \quad \text{and} \quad S_M = \frac{s'q'}{|\nabla_H Q|},$$

$$\mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(v'^2 - e) - Vu'v' \\ V(u'^2 - e) - Uu'v' \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Vu'r' - Uv'r') \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

For the WKB solution

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t),$$

$$M \cong \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \sin^2 \chi |\hat{\Psi}|^2, \quad K^2 \equiv k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2(z)} m^2, \quad k = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

$$u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} \cong -l \hat{\Psi} \cos \chi, \quad v' = \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cong k \hat{\Psi} \cos \chi, \quad r' = -f_0 m \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cong -f_0 m \hat{\Psi} \cos \chi, \quad \text{and} \quad e = \frac{1}{2} K^2 \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2.$$

$$\mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(v'^2 - e) - Vu'v' \\ V(u'^2 - e) - Uu'v' \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Vu'r' - Uv'r') \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(k^2 - \frac{1}{2}K^2) + klV \\ V(l^2 - \frac{1}{2}K^2) + klU \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.87)$$

Plumb (1986)では時間平均をとり直流成分を抽出した.

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_T = S_M, \quad (5.73)$$

where

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_R + \bar{\mathbf{u}}M. \quad (5.74)$$

時間平均を取らない場合には

$$M \cong \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \sin^2 \chi |\hat{\Psi}|^2, \quad \mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(k^2 - \frac{1}{2}K^2) + klV \\ V(l^2 - \frac{1}{2}K^2) + klU \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2, \quad (5.87)'$$

であり,

$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_R + \mathbf{U}M$ で, Fluxを定義することはできない. また M も位相依存性が残る.

$\cos^2 \chi + \sin^2 \chi = 1$ を利用できる形が必要. \mathbf{M}_R と M に付加的な項を導入する.

At the WKB limit of zonal mean case,

$$\frac{\bar{E}}{\bar{u} - c} = A = \frac{1}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\bar{q}_y} \quad . \quad (4.59)'$$

これをと Plumb(1985)を参考として

$$\tilde{E} \equiv \frac{e}{|\mathbf{U}| - C_P} = \frac{e}{\hat{\phi}/k'} = \frac{1}{-\hat{C}_P}, \quad \hat{\omega} = \omega - kU - lV,$$

where C_P and k' are the phase velocity and the wavenumber in the time-mean basic flow direction, respectively.

を導入する.

Takaya and Nakamura (2001)に従い、QG-potential vorticity eq.より $\frac{e}{|\mathbf{U}| - C_P}$ が従う方程式を導くことが本来のやり方であるが、複雑になるので、ここでは簡便な方法により、説明する.

(5.85), (5.86), (5.87) より

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{M}_R + \mathbf{C}_U M) + \nabla \cdot [(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M] = S_M, \quad (5.88)$$

where

$$\mathbf{C}_U = \left(C_P \frac{U}{|\mathbf{U}|}, C_P \frac{V}{|\mathbf{U}|} \right) : \text{Vector in the direction of } \mathbf{U} \text{ with the length } C_P.$$

また、これとは独立に

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E}_R + \mathbf{C}_U \tilde{E}) + D = S_{M2} , \quad (5.89)$$

を満足する \mathbf{E}_R を求める。ここで D はこの段階では未定である。

{(5.88)+(5.89)}/2 を利用して、 $\cos^2 \chi + \sin^2 \chi = 1$ が使える形を求め、最終的には、次の形の式を得ることを目指す。

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{2}(M + \tilde{E}), \quad \mathbf{W}_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{M}_R + \mathbf{E}_R)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{W}_R + \mathbf{C}_U \tilde{A}) = S_{M3} , \quad (5.90)$$

or

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W} = S_{M3} , \quad (5.90)$$

where

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_R + \mathbf{C}_U \tilde{A}, \quad (5.91)$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}_g \tilde{A}, \quad (5.92)$$

and S_{M3} denotes dissipation terms.

For the WKB solution

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t),$$

$$\mathbf{M}_R \equiv \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(v'^2 - e) - Vu'v' \\ V(u'^2 - e) - Uu'v' \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Vu'r' - Uv'r') \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(\psi'_x{}^2 - e) + V\psi'_y\psi'_x \\ V(\psi'_y{}^2 - e) + U\psi'_y\psi'_x \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (V\psi'_y\psi'_z + U\psi'_x\psi'_z) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(k^2 - \frac{1}{2}K^2) + klV \\ V(l^2 - \frac{1}{2}K^2) + klU \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.87)'$$

を参照し、 \mathbf{E}_R を次式のように定義する。

$$\mathbf{E}_R \equiv \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} eU - U\psi'\psi'_{xx} - V\psi'\psi'_{xy} \\ eV - U\psi'\psi'_{xy} - V\psi'\psi'_{yy} \\ -\frac{f_0^2}{N_0^2} (U\psi'\psi'_{xz} + V\psi'\psi'_{yz}) \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}K^2U \\ \frac{1}{2}K^2V \\ 0 \end{bmatrix} \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2 + \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2U + klV \\ klU + l^2V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} \sin^2 \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.93)$$

$$\mathbf{W}_R = \frac{1}{2}(\mathbf{M}_R + \mathbf{E}_R) = \frac{1}{2|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(\psi'_x{}^2 - \psi'\psi'_{xx}) + V(\psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy}) \\ U(\psi'_x\psi'_y - \psi'\psi'_{xy}) + V(\psi'_y{}^2 - \psi'\psi'_{yy}) \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} [U(\psi'_x\psi'_z - \psi'\psi'_{xz}) + V(\psi'_y\psi'_z - \psi'\psi'_{yz})] \end{bmatrix} = \frac{1}{2|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2U + klV \\ klU + l^2V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.94)$$

(5.89)式のDは非散逸的WKB解の場合に(5.89)が次式となるように決める。

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E}_R + C_U \tilde{E}) + D = 0, \quad (5.89)'$$

For the WKB solution

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t),$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial \chi}{\partial y} = l, \quad \frac{\partial \chi}{\partial z} = m, \quad \text{and} \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\omega; \quad \text{locally defined wavenumbers and requency}$$

Dispersion relation

$$\omega = kU + lV - \frac{kQ_y - lQ_x}{K^2}, \quad \text{where } K^2 = k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2, \quad (5.77)'$$

and

$$Q_y = \beta - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad Q_x = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f_0^2}{N_0^2(z)} \frac{\partial V}{\partial z} \right).$$

Rotating the coordinate to the x' direction along \mathbf{U} ,

the dispersion relation can be expressed as follows:

$$\omega = k'|\mathbf{U}| - \frac{k'|\nabla_H Q|}{K^2}, \quad (5.95) \quad \text{or} \quad C_p = \frac{\omega}{k'} = |\mathbf{U}| - \frac{|\nabla_H Q|}{K^2}, \quad (5.95)'$$

because of

$$\mathbf{U} \cdot (\nabla_H Q) \cong 0, \quad (5.83) \quad \text{or} \quad \frac{Q_y}{|\nabla_H Q|} = U/|\mathbf{U}| \quad \text{and} \quad \frac{Q_x}{|\nabla_H Q|} = -V/|\mathbf{U}|.$$

$$\tilde{E} \cong \frac{e}{|\mathbf{U}| - C_p} \cong \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \cos^2 \chi |\hat{\Psi}|^2, \quad (5.96)$$

and

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \cong \frac{\omega K^4}{|\nabla_H Q|} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.97)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E}_R + \mathbf{C}_U \tilde{E}) + D \\ &= \left\{ \frac{\omega K^4}{|\nabla_H Q|} + \frac{K^2}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) - \frac{C_p}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \right\} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2 + D = 0. \end{aligned}$$

Thus, for the WKB solution,

$$D = - \left\{ \frac{\omega K^4}{|\nabla_H Q|} + \frac{K^2}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) - \frac{C_p}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \right\} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.98)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = S_M, \quad (5.85)$$

where

$$M = \frac{1}{2} \frac{q'^2}{|\nabla_H Q|}, \quad \text{and} \quad S_M = \frac{s'q'}{|\nabla_H Q|},$$

Plumb(1986)の時間平均を取らない場合

$$\mathbf{M}_R \cong \frac{1}{|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} U(v'^2 - e) - Vu'v' \\ V(u'^2 - e) - Uu'v' \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Vu'r' - Uv'r') \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

Utilizing $\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$, (5.85) may be written as follows:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + V \frac{\partial}{\partial y} \right) M + \nabla \cdot \mathbf{M}_R = \frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{M}_R + \mathbf{U}M) =$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{M}_R + \mathbf{C}_U M) + \nabla \cdot \{(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M\} = S_M \quad . \quad (5.99)$$

For the WKB solution

$$\psi'(x, y, z, t) = \hat{\Psi}(x, y, z, t) \sin \chi(x, y, z, t),$$

$$M \cong \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \sin^2 \chi |\hat{\Psi}|^2, \quad K^2 \cong k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2(z)} m^2, \quad k = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial \chi}{\partial z},$$

and

$$\nabla \cdot \{(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M\} = \left\{ 1 - \frac{C_p}{|\mathbf{U}|} \right\} \frac{K^4 (kU + lV)}{|\nabla_H Q|} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.100)$$

For the WKB solution, from (5.98) and (5.100) we get

$$D + \nabla \cdot \{(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M\} = - \left\{ \frac{\omega K^4}{|\nabla_H Q|} + \frac{K^2}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) - \frac{C_p}{|\mathbf{U}|} (kU + lV) \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \right\} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2$$

$$+ \left\{ 1 - \frac{C_p}{|\mathbf{U}|} \right\} \frac{K^4 (kU + lV)}{|\nabla_H Q|} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2$$

$$= \left\{ -\omega - \frac{kU + lV}{|\mathbf{U}|} \frac{|\nabla_H Q|}{K^2} + (kU + lV) \right\} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} \cos \chi \sin \chi |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.101)$$

Dispersion relation can be expressed as follows:

$$\omega = kU + lV - \frac{kQ_y - lQ_x}{K^2}. \quad (5.77)'$$

Because of

$$\mathbf{U} \cdot (\nabla_H Q) \cong 0, \quad (5.83) \quad \text{or} \quad \frac{Q_y}{|\nabla_H Q|} = U/|\mathbf{U}| \quad \text{and} \quad \frac{Q_x}{|\nabla_H Q|} = -V/|\mathbf{U}|,$$

$$\begin{aligned} \left\{ -\omega - \frac{kU + lV}{|\mathbf{U}|} \frac{|\nabla_H Q|}{K^2} + kU + lV \right\} &= \left\{ \frac{kQ_y - lQ_x}{K^2} - \frac{kU + lV}{|\mathbf{U}|} \frac{|\nabla_H Q|}{K^2} \right\} \\ &= \frac{|\nabla_H Q|}{K^2} \left\{ \frac{kQ_y - lQ_x}{|\nabla_H Q|} - \frac{kU + lV}{|\mathbf{U}|} \right\} = \frac{|\nabla_H Q|}{K^2} \left\{ k \frac{U}{|\mathbf{U}|} + l \frac{V}{|\mathbf{U}|} - \frac{kU + lV}{|\mathbf{U}|} \right\} = 0, \end{aligned}$$

Thus,

$$D + \nabla \cdot \left\{ (\mathbf{U} - \mathbf{C}_U) M \right\} = 0, \quad \text{for the non-dissipative WKB solution.}$$

From

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{E}_R + \mathbf{C}_U \tilde{E}) + D = 0, \quad (5.89)'$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{M}_R + \mathbf{C}_U M) + \nabla \cdot \{(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M\} = S_M, \quad (5.99)$$

and

$$D + \nabla \cdot \{(\mathbf{U} - \mathbf{C}_U)M\} = 0, \quad (5.101)$$

we get

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{W}_R + \mathbf{C}_U \tilde{A}) = S_{M3}, \quad (5.102)$$

or

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{W} = S_{M3}, \quad (5.103)$$

where

$$\tilde{A} \equiv \frac{1}{2}(M + \tilde{E}), \quad \mathbf{W}_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{M}_R + \mathbf{E}_R)$$
$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_R + \mathbf{C}_U \tilde{A}. \quad (5.104)$$

WKB的な場合には $\mathbf{W} = \mathbf{C}_g \tilde{\mathbf{A}}$, (5.92) となることの証明

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \tilde{\mathbf{E}}) = \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H \mathcal{Q}|} |\hat{\Psi}|^2,$$

$$\mathbf{W}_R \equiv \frac{1}{2}(\mathbf{M}_R + \mathbf{E}_R) = \frac{1}{2|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2 U + klV \\ klU + l^2 V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.94)$$

より,

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_R + \mathbf{C}_U \tilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{2|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2 U + klV + C_p U \frac{K^4}{|\nabla_H \mathcal{Q}|} \\ klU + l^2 V + C_p V \frac{K^4}{|\nabla_H \mathcal{Q}|} \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (Ukm + Vlm) \end{bmatrix} |\hat{\Psi}|^2. \quad (5.105)$$

ここで、分散関係 (5.77) と群速度 (5.78)を利用して

Dispersion relation

$$\omega = kU + lvV - \frac{kQ_y - lQ_x}{K^2}, \quad \text{where } K^2 = k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N_0^2} m^2, \quad (5.77)'$$

この分散関係は C_p で表現すると,

$$C_p = |\mathbf{U}| - \frac{|\nabla_H Q|}{K^2},$$

Group velocity

$$\mathbf{C}_g = (C_{gx}, C_{gy}, C_{gz}) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial l}, \frac{\partial \omega}{\partial m} \right)$$

$$\mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} U - \frac{Q_y}{K^2} + 2k \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \\ V + \frac{Q_x}{K^2} + 2l \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \\ 2m \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \end{bmatrix}, \quad (5.78)'$$

この群速度を、分散関係と基本場場が満たす式

$$\mathbf{U} \cdot (\nabla_H Q) \cong 0, \quad (5.83) \quad \text{or} \quad \frac{Q_y}{|\nabla_H Q|} = U/|\mathbf{U}| \quad \text{and} \quad \frac{Q_x}{|\nabla_H Q|} = -V/|\mathbf{U}|$$

により、変形すると

$$\mathbf{C}_g = \begin{bmatrix} U - \frac{Q_y}{K^2} + 2k \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \\ V + \frac{Q_x}{K^2} + 2l \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \\ 2m \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{U}{|\mathbf{U}|} C_p + \frac{2k^2 Q_y}{K^4} - \frac{2klQ_x}{K^4} \\ \frac{V}{|\mathbf{U}|} C_p + \frac{2klQ_y}{K^4} - \frac{2l^2 Q_x}{K^4} \\ 2m \frac{f_0^2}{N_0^2} \frac{kQ_y - lQ_x}{K^4} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_U + \frac{2|\nabla_H Q|}{K^4 |\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2 U + klV \\ klU + l^2 V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (kmU + lmV) \end{bmatrix}. \quad (5.106)$$

$$\mathbf{C}_g \tilde{A} = \frac{1}{2} \frac{K^4}{|\nabla_H Q|} |\hat{\Psi}|^2 \left\{ \mathbf{C}_U + \frac{2|\nabla_H Q|}{K^4 |\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2 U + klV \\ klU + l^2 V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (kmU + lmV) \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{C}_U \tilde{A} + \frac{1}{2|\mathbf{U}|} \begin{bmatrix} k^2 U + klV \\ klU + l^2 V \\ \frac{f_0^2}{N_0^2} (kmU + lmV) \end{bmatrix} |\hat{\Psi}|^2 = \mathbf{C}_U \tilde{A} + \frac{1}{2} (\mathbf{M}_R + \mathbf{E}_R) = \mathbf{W}.$$

この関係は、Plumb(1985): 定常波（位相速度＝0），基本場は東西流のみ

$$\mathbf{c}_g A_s = \frac{1}{2} \hat{\Psi}^2 \begin{pmatrix} k^2 \\ kl \\ km \frac{f_0^2}{N_0^2} \end{pmatrix} = \mathbf{F}_s$$

の，拡張になっている。

また, Plumb(1986): 非定常波, 基本場は東西流および南北流

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{M}_T = S_M, \quad (5.73)$$

where

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{M}_R + \bar{\mathbf{u}}M. \quad (5.74)$$

Under the WKB limit,

$$\mathbf{M}_T = \mathbf{c}_g M. \quad (5.75)$$

この場合には, 時間平均により, 波動の位相構造を消去している。
これにより, 結果には波動の位相は残らず, 基本流のみが関与する形となっている。

Takaya and Nakamura (2001)では, 時間平均を取らないので位相速度が関与する。

Takaya and Nakamuraの場合にも, 時間平均を取らない形でPlumb(1986)のように
3次元の残差循環(Residual circulation)を定義することができる。

また, (5.94) で与えられるfluxの各項の物理的意味も議論されている。
ここでは, それらについて触れてないので, 興味ある方は原著を参照してほしい。

ブロッキング時のflux Takaya and Nakamura (2001)

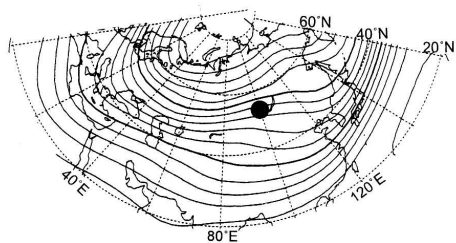
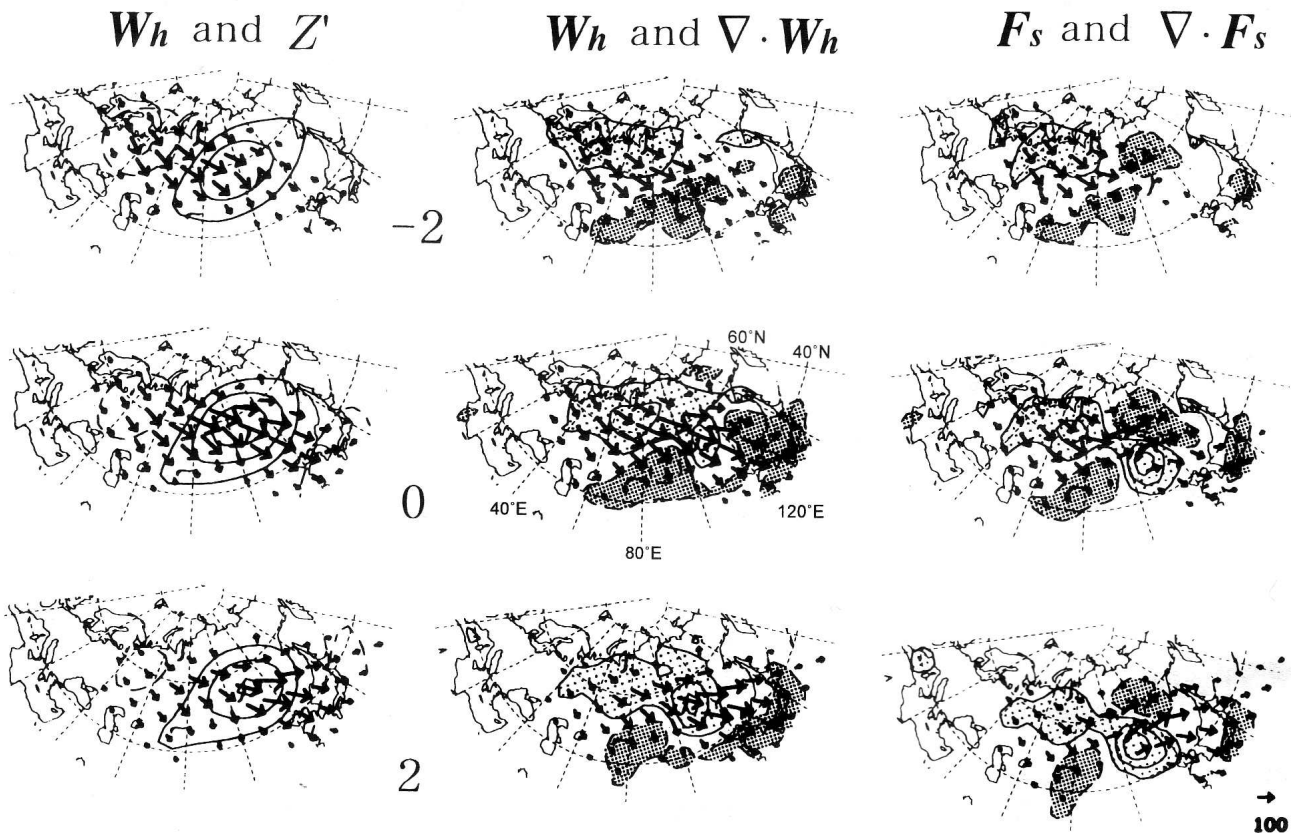


FIG. 3. Climatological-mean 250-hPa height (m) in winter (mid-Nov–mid-Mar) for 1965–92. Contour interval is 100. Heavy lines indicate 10 000 and 10 500. The closed circle corresponds to the composited blocking center at (54°N, 100°E).

Time mean (1965-1992)
geopotential height



Baroclinic wave packetに伴う flux Takaya and Nakamura (2001)

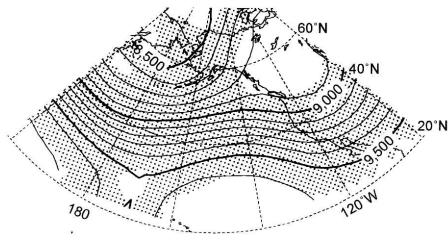


FIG. 5. Basic state for migratory disturbances, as defined by 8-day low-pass-filtered 300-hPa height field at 0000 UTC on 20 Nov 1983. Contour interval is 100 m. Heavy lines denote 8500, 9000, and 9500 m. Regions where $|U| - C_p < 2.0 \text{ m s}^{-1}$ are shaded.

20 Nov. 1983

8-day low-pass-filtered

300hPa geopotential height

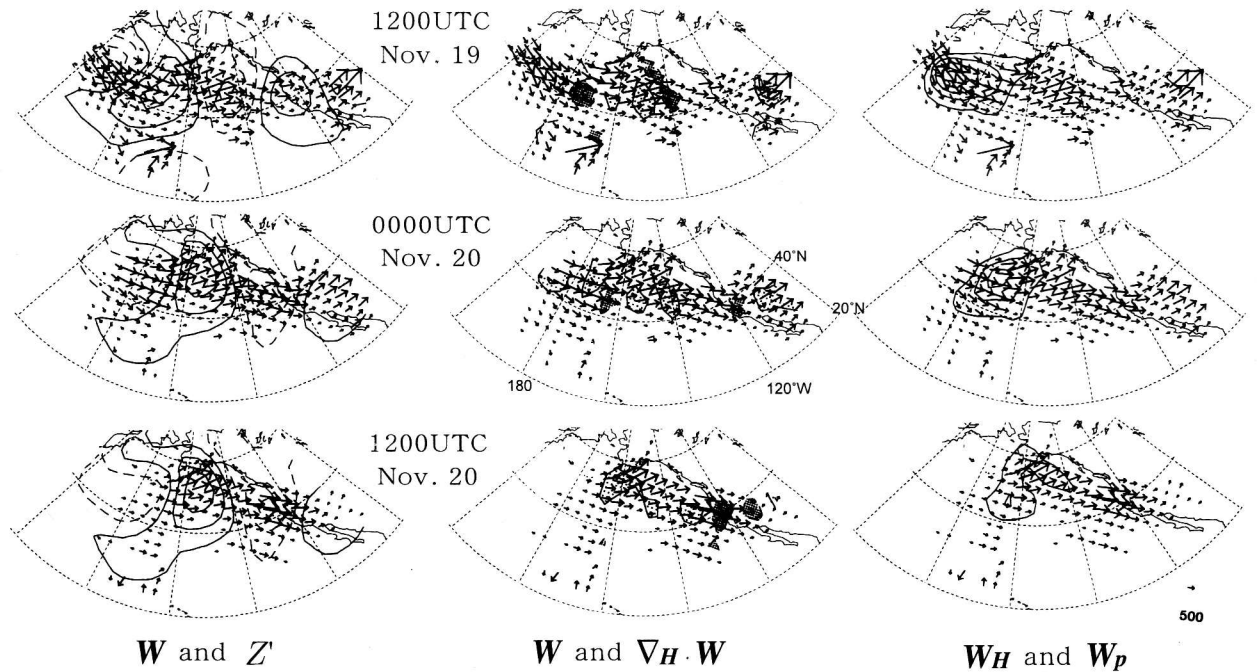


FIG. 6. Time sequence of (left column) 8-day high-pass-filtered 300-hPa height (Z'), superimposed on the horizontal component of \mathbf{W} with arrows, (middle column) horizontal component of \mathbf{W} with arrows and its divergence/convergence with contours, and (right column) horizontal component of \mathbf{W} with arrows superimposed on the vertical component of 600 hPa with contours. The sequence begins at 1200 UTC on 19 Nov 1983 with 12-h intervals (from top to bottom). Here Z' is contoured for every 100 m from 50 m and dashed for negative values, and $\nabla_H \cdot \mathbf{W}$ is contoured for every $8.0 \times 10^{-4} \text{ m s}^{-2}$. Light shading with solid lines and heavy shading with dashed lines denote the divergence and convergence, respectively. The vertical component of \mathbf{W} is contoured for every 5.0 Pa m s^{-2} . Solid and dashed lines indicate where the flux is upward and downward, respectively. Scaling of \mathbf{W} is given near the lower panel (unit: $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$).

擬エネルギー (pseudo-energy) 保存について

Plumb (1986)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{2} \overline{q'^2} \right) + (\nabla \cdot \mathbf{B}) \cdot (\nabla_H \bar{q}) = \overline{s'q'} . \quad (5.66)$$

Bretherton and Garrett (1969)

In case of slowly varying media or in case of slowly varying wave trains,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{c}_g \frac{\bar{E}}{\hat{\omega}} \right) = 0 , \quad (5.67)$$

where $\frac{\bar{E}}{\hat{\omega}}$, \bar{E} , $\hat{\omega}$, \mathbf{c}_g are wave action density, energy density, the intrinsic frequency, and the group velocity, respectively.

Slowly varying media or wave train を仮定して、近似的保存則

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

を、導出した。運動量あるいは擬運動量保存。

擬エネルギー (pseudo-energy) については、基本場が空間的に一様ではなくても時間平均を用いて保存則を導くことができる。

QG waveについて

Plumb, 1985: An Alternative form of Andrews' conservation law for quasi-geostrophic waves on a steady, nonuniform flow, JAS, 42, 298-300.

この論文のreferenceに関連する詳しい論文が引用されている.

擬エネルギー保存 Plumb(1985)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{E}_T = S_E$$

$$\varepsilon = p \left(e + \frac{1}{2} \frac{\nabla_H \bar{\psi} \cdot \nabla_H \bar{Q}}{|\nabla_H \bar{Q}|^2} \overline{q'^2} \right)$$

where e denotes energy of QG-disturbance.

何故、エネルギーが wave-mean flow interaction theory に登場しないのか？

上式は、ガリレー変換に対して不変（平均場のgradientしか含んでいない）.
平均場のエネルギーはガリレー変換に対して不変ではない.