

銀河形成とダークマター

岡本 崇

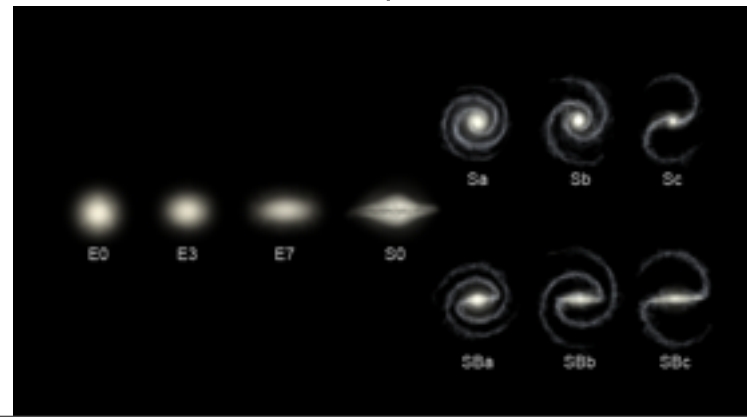
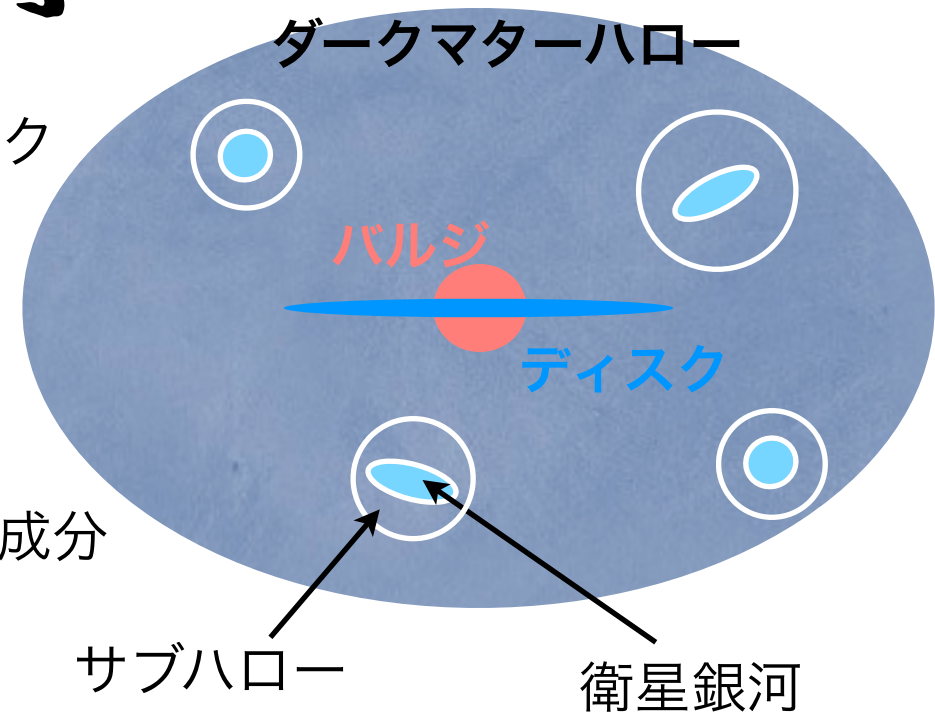
筑波大学数理物質系
(計算科学研究センター・神戸分室)

内容

- イントロダクション
- 線形理論や球対称モデルに基づいた簡単な構造形成の話
- CDM モデルと銀河形成
 - ダークハローの密度プロファイルを中心に
- 時間があったらシミュレーション手法

銀河

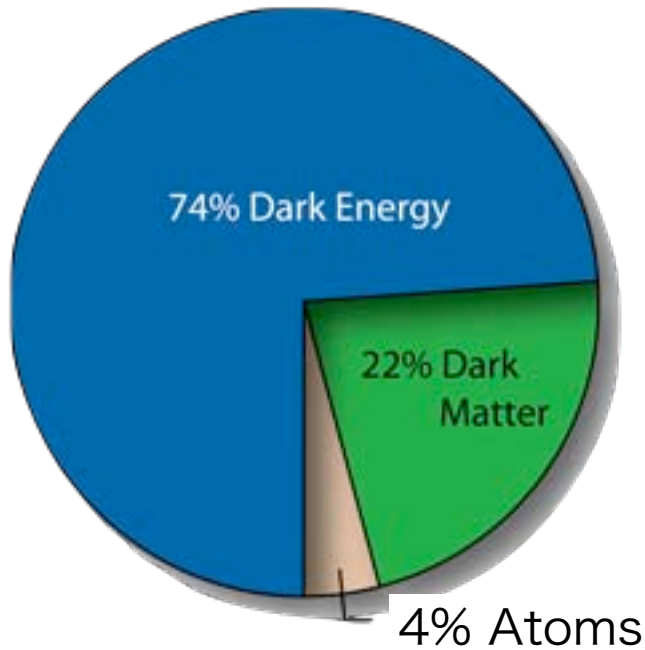
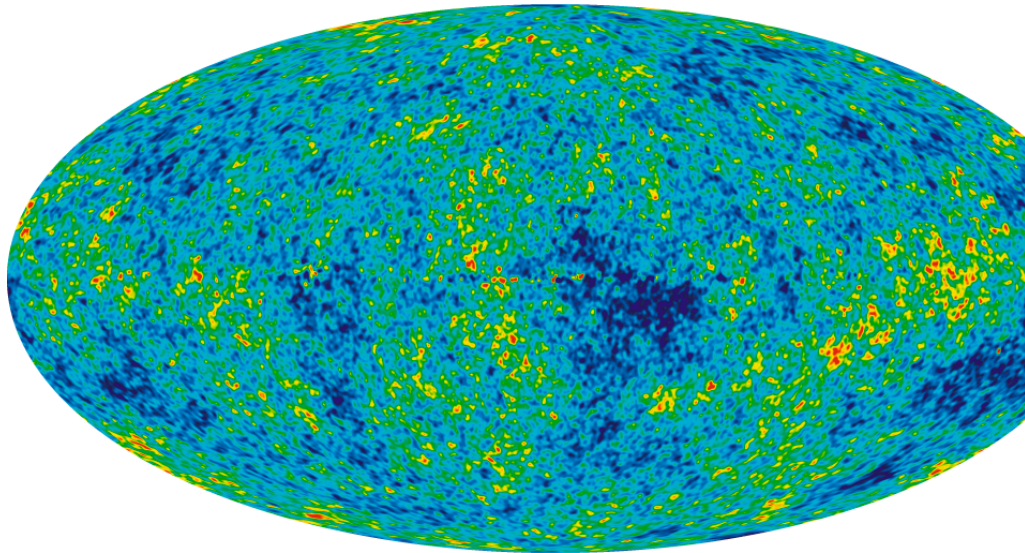
- ダークマターハローという, ダークマターの密度揺らぎが自己重力崩壊して力学平衡に達した天体の中心に存在
- 主にバルジと円盤という 2 つの成分から成る
 - バルジが卓越 → 楕円銀河 (M87とか)
 - 円盤が卓越 → 円盤銀河 (MW とか M31 とか)



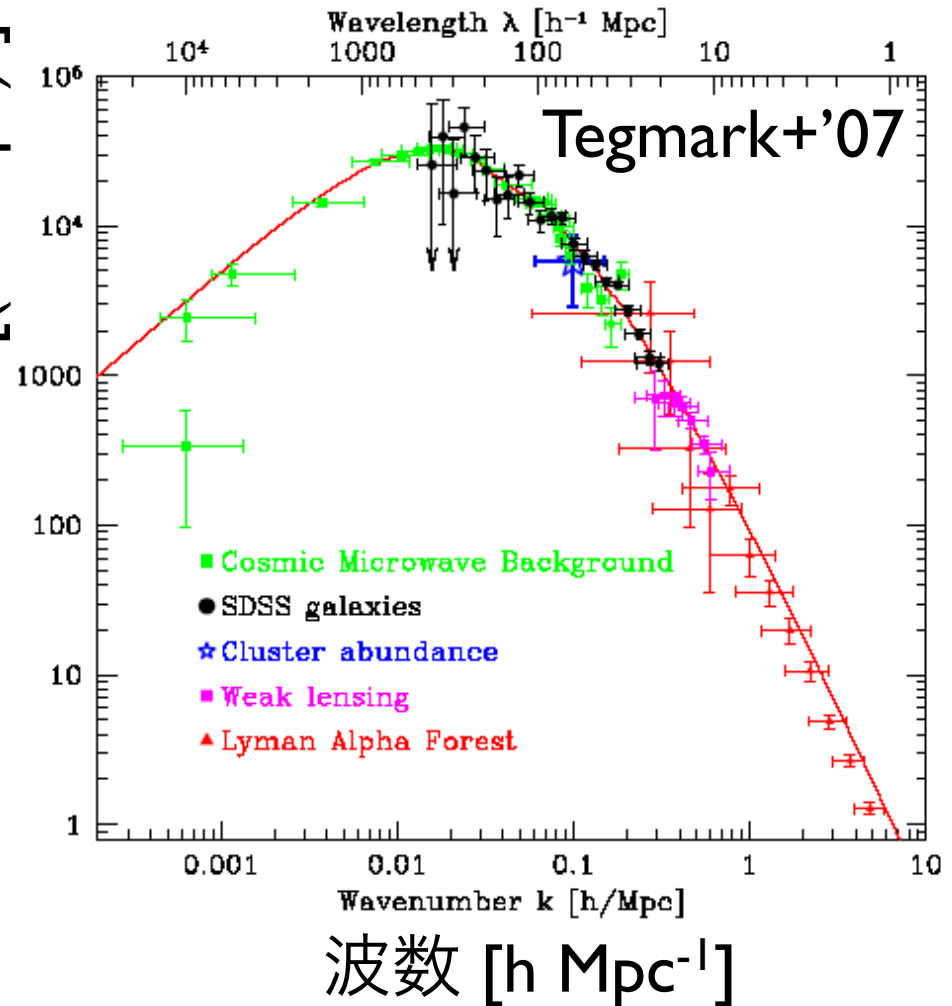
銀河形成の初期条件

- 銀河や銀河団のような天体は宇宙の初期密度揺らぎから生まれる
- 初期密度揺らぎの性質を決めれば初期条件が決まる
- inflation (flat) + random Gaussian 揺らぎ

Λ CDM: 標準宇宙モデル



パワースペクトル $[(h^{-1} \text{ Mpc})^3]$



宇宙の歴史

インフレーション+ 元素合成

宇宙再電離

銀河・銀河団・惑星等の形成

時空の量子的揺らぎ

宇宙暗黒時代

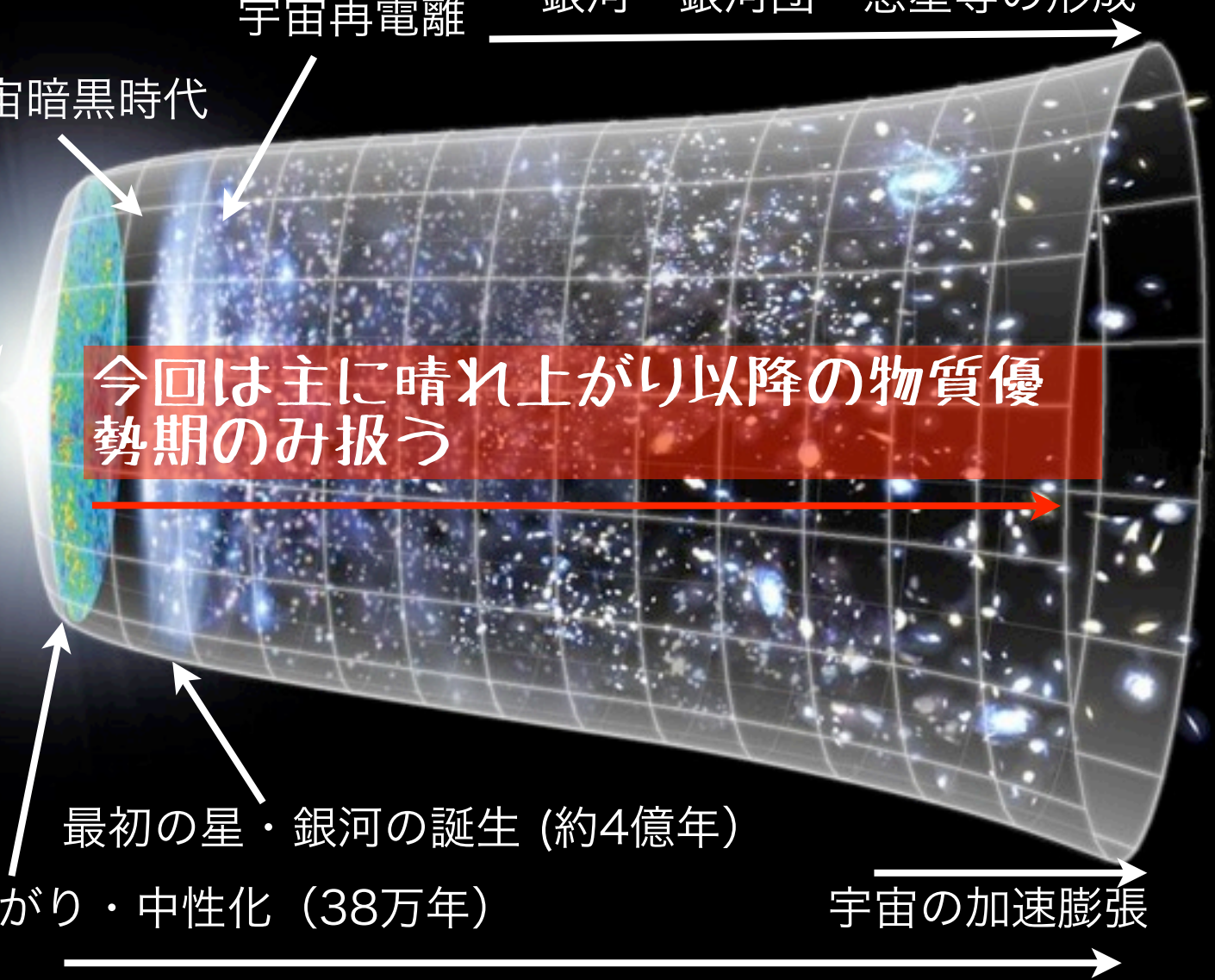
今回は主に晴れ上がり以降の物質優勢期のみ扱う

最初の星・銀河の誕生 (約4億年)

宇宙の晴れ上がり・中性化 (38万年)

宇宙の加速膨張

137億年



構造形成
@物質優勢期

一様等方宇宙

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (\text{Einstein 方程式})$$

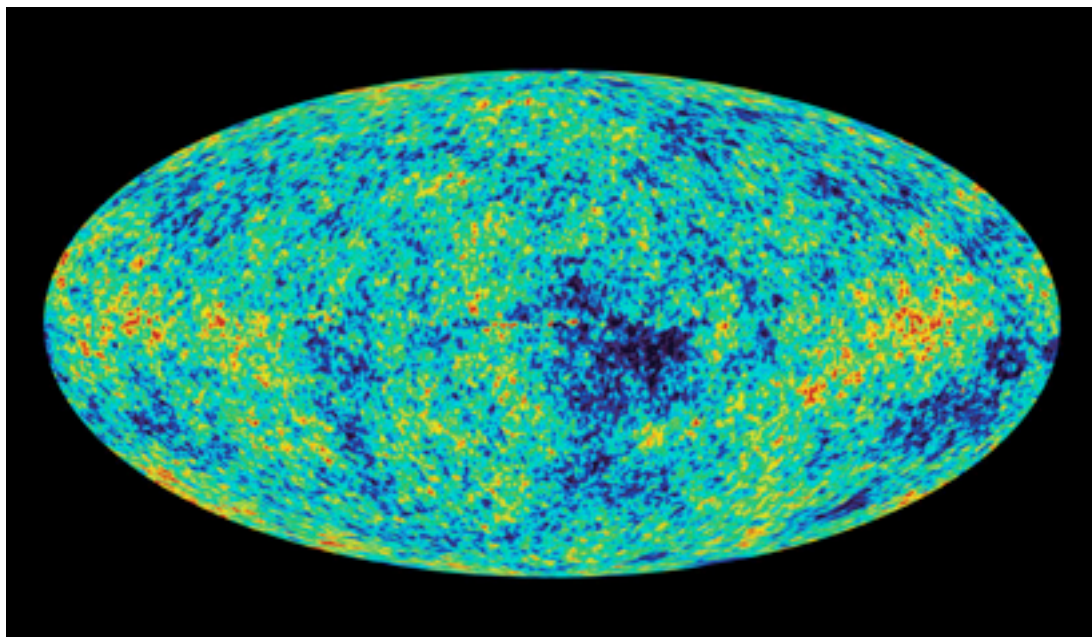
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{\sqrt{1 - Kr^2}} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (\text{Robertson-Walker metric})$$

から Friedmann 方程式を得る.

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

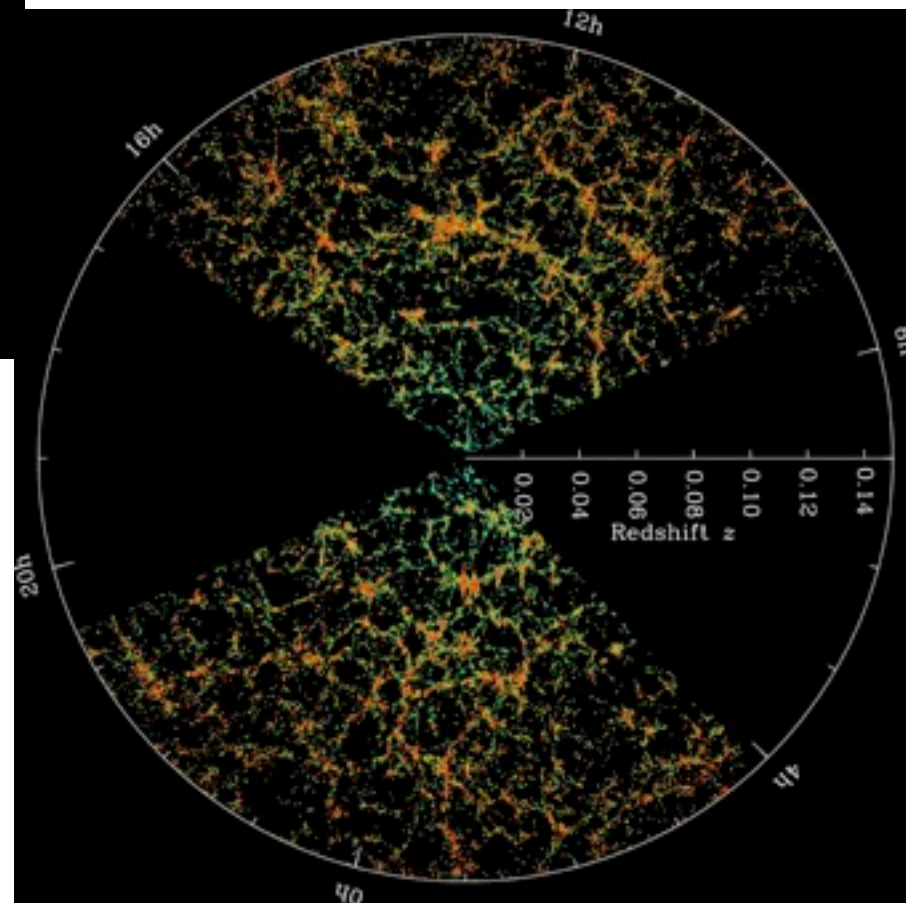
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (\rho \text{ はエネルギー密度})$$

一樣等方？



WMAP

SDSS



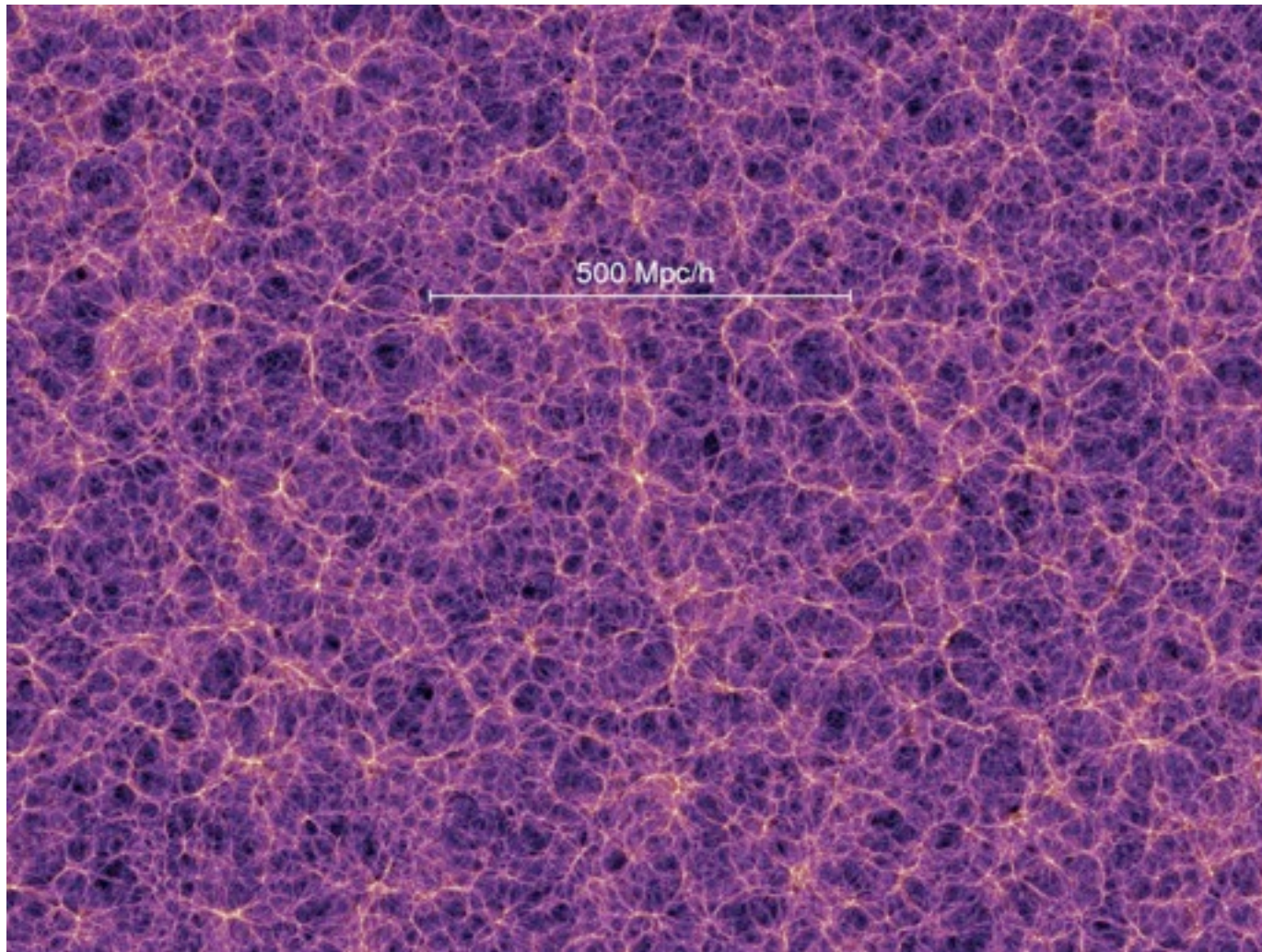
Cold Dark Matter Universe



Cold Dark Matter Universe



Cosmic Web



MILLENNIUM SIMULATION

構造形成

- 宇宙初期の微少な密度揺らぎが自己重力的に成長
 - 宇宙膨張と自己重力
- 今回はニュートン近似のみ扱う
 - 相対論抜き
 - 宇宙の熱史とかもなし
 - CDM powerspectrum の話もなし

宇宙論パラメータ

Einstein-de Sitter 宇宙のエネルギー密度は Friedmann eq. より

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}$$

宇宙論パラメータを以下のように定義すると

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2} \rho, \quad \Omega_k \equiv \frac{c^2 K}{H^2 a^2}, \quad \Omega_\Lambda \equiv \frac{c^2 \Lambda}{3H^2}$$

Friedmann eq. は

$$\Omega - \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$$

現在の値を用いて書きなおすと

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0}$$

$$\left(\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} - \frac{\Omega_{k,0}}{a^2} + \Omega_{\Lambda,0} \right)$$

流体近似

- 簡単のために $\Lambda = 0$ の場合を考える
- 基礎方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \Psi - \frac{\nabla p}{\rho},$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G \rho,$$

$$(\Delta \Psi = 4\pi G \rho - \Lambda c^2).$$

共同座標系

以降, ρ はエネルギー密度ではなく物質密度
(エネルギー密度/ c^2) とする

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= a(t)\mathbf{x}, \\ \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) &= \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}} \equiv H\mathbf{r} + \mathbf{u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} &\rightarrow \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}, \\ \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}} &\rightarrow \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

共同座標系での基礎方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \frac{1}{a}\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t}(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}) \\ &= \ddot{a}\mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= -\frac{\nabla p}{a\rho} - \frac{\nabla \Psi}{a}\end{aligned}$$

$$\Delta \Psi = 4\pi G\rho a^2$$

線形近似

- 物理量の微少な変化を考える
- Background (0次)

$$\rho = \bar{\rho} + \rho_1$$

$$\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}$$

$$\Psi = \Psi_0 + \phi$$

$$p = p_0 + p_1.$$

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} a^3) = 0 \quad \leftarrow \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3H\bar{\rho} = 0,$$

$$\ddot{a}\mathbf{x} = -\frac{1}{a} \nabla \Psi_0,$$

$$\Delta \Psi_0 = 4\pi G \bar{\rho} a^2$$

$$3\ddot{a} = -\frac{1}{a} \Delta \Psi_0 = -4\pi G \bar{\rho} a$$

$\rho = \Lambda = 0$ の Friedmann eq.

今度こそ線形近似

- 密度揺らぎ $\delta \equiv \frac{\rho}{\bar{\rho}} - 1 \ll 1$ を考える

$$\bar{\rho} \frac{\partial(\delta + 1)}{\partial t} + (\delta + 1) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H(\delta + 1) + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla \cdot \{(\delta + 1)\mathbf{u}\} = 0$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\ddot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{a} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla(p_0 + p_1)}{a\bar{\rho}(\delta + 1)} - \frac{\nabla(\Psi_0 + \phi)}{a}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H\mathbf{u} = -\frac{\nabla p_1}{a\bar{\rho}} - \frac{\nabla \phi}{a} = -\frac{1}{a} \nabla \frac{c_s^2 \rho_1}{\bar{\rho}} - \frac{\nabla \phi}{a} = \left(-\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{\nabla \phi}{a} \right)$$

$$\Delta \phi = 4\pi G \bar{\rho} \delta a^2$$

$$\left(c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_S \quad \text{and} \quad p_1 = c_s^2 \rho_1 + \frac{\partial p}{\partial S} \Big|_\rho \delta S \right)$$

密度揺らぎの運動方程式

- 運動方程式に ∇ を作用させる

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + H \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{c_s^2}{a} \Delta \delta - \frac{\Delta \phi}{a}$$

- 連続の式から

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

- δ のみの式にすると

$$\ddot{\delta} = -2H\dot{\delta} + 4\pi G\bar{\rho}\delta + \frac{c_s^2}{a^2}\Delta\delta$$

右辺第1項は宇宙膨張が摩擦項となっていること, 第2項は重力による力, 第3項は圧力によって揺らぎが上に凸の部分の成長が抑制されることを示す

Jeans 波長

- $\delta \propto \exp(\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ として分散関係を導く

- 運動方程式に代入すると

$$\omega^2 + 2H\omega - 4\pi G\bar{\rho} + k^2 \frac{c_s^2}{a^2} = 0$$

- 不安定 ($\omega > 0$) になるための条件は

$$k^2 < k_J^2 = 4\pi G\bar{\rho} \frac{a^2}{c_s^2} \text{ or } \lambda > \lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = \sqrt{\frac{\pi c_s^2}{G\bar{\rho} a^2}}$$

- $H^2 = 8\pi G\bar{\rho}/3$ より $\lambda > \lambda_J \simeq \frac{c_s}{aH}$

- 輻射優勢期には $c_s \sim c$ なのでホライズンより小さなスケールの揺らぎは成長できない ($l_H = c/H$)

密度揺らぎの線形成長

- E-dS ($K = \Lambda = 0$) を考える. また物質優勢期を考えるので $c_s = 0$

- Friedmann 方程式は $\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{\rho_{c,0}}{a^3} a^2 = \frac{H_0^2}{a}$

- $a(t) = A t^\alpha$ とおくと,

$$a = \left(\frac{9}{4} H_0^2 \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad \therefore H = \frac{2}{3} t^{-1}$$

- 運動方程式は $\ddot{\delta} + \frac{4}{3} \dot{\delta} t^{-1} - \frac{2}{3} \delta t^{-2} = 0$

密度揺らぎの線形成長

- 運動方程式 $\ddot{\delta} + \frac{4}{3}\dot{\delta}t^{-1} - \frac{2}{3}\delta t^{-2} = 0$ に
 $\delta \propto t^\alpha$ として代入すると $\alpha = 2/3$ and -1
- 一般解は $\delta(t) = C_1 t^{\frac{2}{3}} + C_2 t^{-1}$
- growing mode を $D(t)$ と書く. E-dS では
 $D(t) \propto a(t)$

速度揺らぎの線形成長

- 線形段階の密度揺らぎは $\delta(x, t) = D(t)A(x)$ と書ける $\therefore \dot{\delta} = (\dot{D}/D)\delta$
- 線形化された連続の式と Poisson eq. を用

いて
$$\dot{\delta} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{a} = \frac{\dot{D}}{D}\delta + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{a} = 0$$

$$\therefore \nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\Delta \phi}{4\pi G \bar{\rho} a}$$

- 積分すると
$$\mathbf{u} = -\frac{\dot{D}}{D} \frac{\nabla \phi}{4\pi G \bar{\rho} a} + \nabla \times \boldsymbol{\omega}.$$

Decaying mode

Zel'dovich 近似

- Lagrange 座標での近似

$$\mathbf{r} = a(t)\{\mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})\}; \quad \mathbf{x} = \mathbf{q} + b(t)\mathbf{s}(\mathbf{q})$$

- 質量保存より $\rho d^3x = \bar{\rho} d^3q$

$$\rho = \bar{\rho} \left| \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{q}} \right|^{-1} \equiv \bar{\rho} |\mathcal{D}|^{-1} = \frac{\bar{\rho}}{\left| \delta_{ij} + b(t) \frac{\partial s_i}{\partial q_j} \right|}$$

- 線形化すると

$$\rho = \bar{\rho}(1 - b\nabla_q \cdot \mathbf{s}) \Rightarrow \delta = -b\nabla_q \cdot \mathbf{s}$$

- つまり $b(t) = D(t)$

- 弱非線形領域 ($\delta \sim 4$) まで使える

- 宇宙論的シミュレーションの初期条件を作る時に使う

球対称解

- 非線形段階 (collapse) を球対称モデルで調べる: $\ddot{r} = -\frac{GM(< r)}{r^2}$
- エネルギー積分: $\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM(< r)}{r} = E.$
- $E < 0$ (collapse) の時の解は cycloid 曲線:

$$\begin{cases} r = A^2(1 - \cos \theta), \\ t = \frac{A^3}{\sqrt{GM}}(\theta - \sin \theta). \end{cases}$$

線形化

- 球の密度は $\rho = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{r^3}$.
- background は $\bar{\rho} = \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G t^2}$.
- $\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{9}{2} \frac{(\theta - \sin \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^3} - 1$.
- for $\theta \ll 1$, $t_L = \frac{A^3}{6\sqrt{GM}} \theta^3$,
$$\delta_L = \frac{3}{20} \theta^2$$

$$\therefore \delta_L(t) = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM} t_L}{A^3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

δ_L と δ の関係

- $\theta = \pi$ で r は最大 (turnaround) : $r = A(1 - \cos \theta)$
$$\delta_{\text{ta}} = \delta(\pi) = \frac{9\pi^2}{16} - 1 \simeq 4.5$$
- この時刻の δ_L は
$$\delta_{L,\text{ta}} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_{\text{ta}}}{A^3} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq 1.06 \left(\because t_{\text{ta}} = \frac{A^3\pi}{\sqrt{GM}} \right)$$
- $r = 0$ at $\theta = 2\pi$ (collapse)
$$\delta_{L,c} = \frac{3}{20} \left(\frac{6\sqrt{GM}t_c}{A^3} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq 1.69 \left(\because t_c = \frac{A^3 2\pi}{\sqrt{GM}} \right)$$
- $\delta_L > \delta_{L,c}$ となった密度揺らぎは collapse する

virial overdensity

- 球の持つ全エネルギー: $E = -\frac{GM}{r_{\text{ta}}}$

- virial 平衡: $2T + W = 0$

$$E = T + W = \frac{W}{2} = -\frac{GM}{2r_{\text{vir}}}; \therefore r_{\text{vir}} = \frac{r_{\text{ta}}}{2}$$

- $\rho_{\text{vir}} = 2^3 \rho_{\text{ta}}$

- $\bar{\rho} \propto t^{-2}$ and $t_c = 2t_{\text{ta}}; \therefore \bar{\rho}_c = \frac{\bar{\rho}_{\text{ta}}}{4}$

- 以上より virial overdensity は

$$\Delta_{\text{vir}} = \left. \frac{\rho}{\bar{\rho}} \right|_{\text{vir}} = 32 \frac{\rho}{\bar{\rho}_{\text{ta}}} = 32(\delta_{\text{ta}} + 1) = 18\pi^2 \simeq 178.$$

ダークマターの質量関数

- 質量 M の天体の個数密度 $n(M) dM$
- 密度揺らぎの統計的性質: random Gaussian
 - $\sigma^2 = \langle \delta^2 \rangle$
 - 一点分布関数: $f(\delta)d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) d\delta$
 - δ のフーリエ変換: $\hat{\delta}(\mathbf{k}) = |\hat{\delta}(\mathbf{k})| e^{i\phi(\mathbf{k})} = \int \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$
 - パワースペクトル $P(k) \equiv \langle |\hat{\delta}(\mathbf{k})|^2 \rangle$,
 $\langle \hat{\delta}(\mathbf{k}) \hat{\delta}(\mathbf{k}')^* \rangle = P(k) \delta^D(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$,
 $\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int P(k) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}$.

密度場の smoothing

- Window function, $W_M(\mathbf{x})$, を導入. 球対称なものを用いて $\int W_M(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$ と規格化
- mass scale M の揺らぎ: $\delta_M(\mathbf{x}) = \int W_M(\mathbf{x}' - \mathbf{x})\delta(\mathbf{x}')d\mathbf{x}'$.
- $\delta_M(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{W}(kR)\hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}$,
 $\therefore \delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{\delta}(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}$,
where $\hat{W}(kR) = \int W_M(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{x}$.

Window functions

- Top-hat

$$W_M(R) = \frac{3}{4\pi R^3} \theta(1 - r/R)$$

$$\hat{W}(kR) = \frac{3}{(kR)^3} \{\sin(kR) - kR \cos(kR)\}$$

- Gaussian

$$W_M(R) = \frac{1}{(2\pi R^3)^{\frac{2}{3}}} \exp\left(-\frac{r^2}{2R^2}\right)$$

$$\hat{W}(kR) = \exp\left(-\frac{k^2 R^2}{2}\right)$$

- Sharp k-space

$$W_M(R) = \frac{1}{(2\pi^2 r^3)} \{\sin(k_c r) - k_c r \cos(k_c r)\}$$

$$\hat{W}(kR) = \theta(k_c - k), \text{ where } k_c \simeq R^{-1}$$

Press-Schechter mass function

$$\sigma(M) = \langle \delta_M^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{W}(kR)^2 P(k) d\mathbf{k}.$$

$$\underline{f(\delta_M \geq \delta_c)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)} \int_{\delta_c}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma(M)^2}\right) d\delta_M$$

↑
 $M' > M$ で collapse してる領域の内側も含む. $M \sim M+dM$ の collapse している天体の個数密度を $n(M)dM$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{Mn(M)}{\bar{\rho}} dM &= f(\delta_M \leq \delta_c) - f(\delta_{M+dM}) \simeq -\frac{\partial f(\delta_M \leq \delta_c)}{\partial M} dM \\ &= -\frac{\delta_c}{\sqrt{2\pi}\sigma(M)^2} \frac{\partial \sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) dM. \end{aligned}$$

A factor of two

$$n(M)dM = -\frac{\bar{\rho}\delta_c}{\sqrt{2\pi}M\sigma(M)^2} \frac{\partial\sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) dM \quad (1)$$

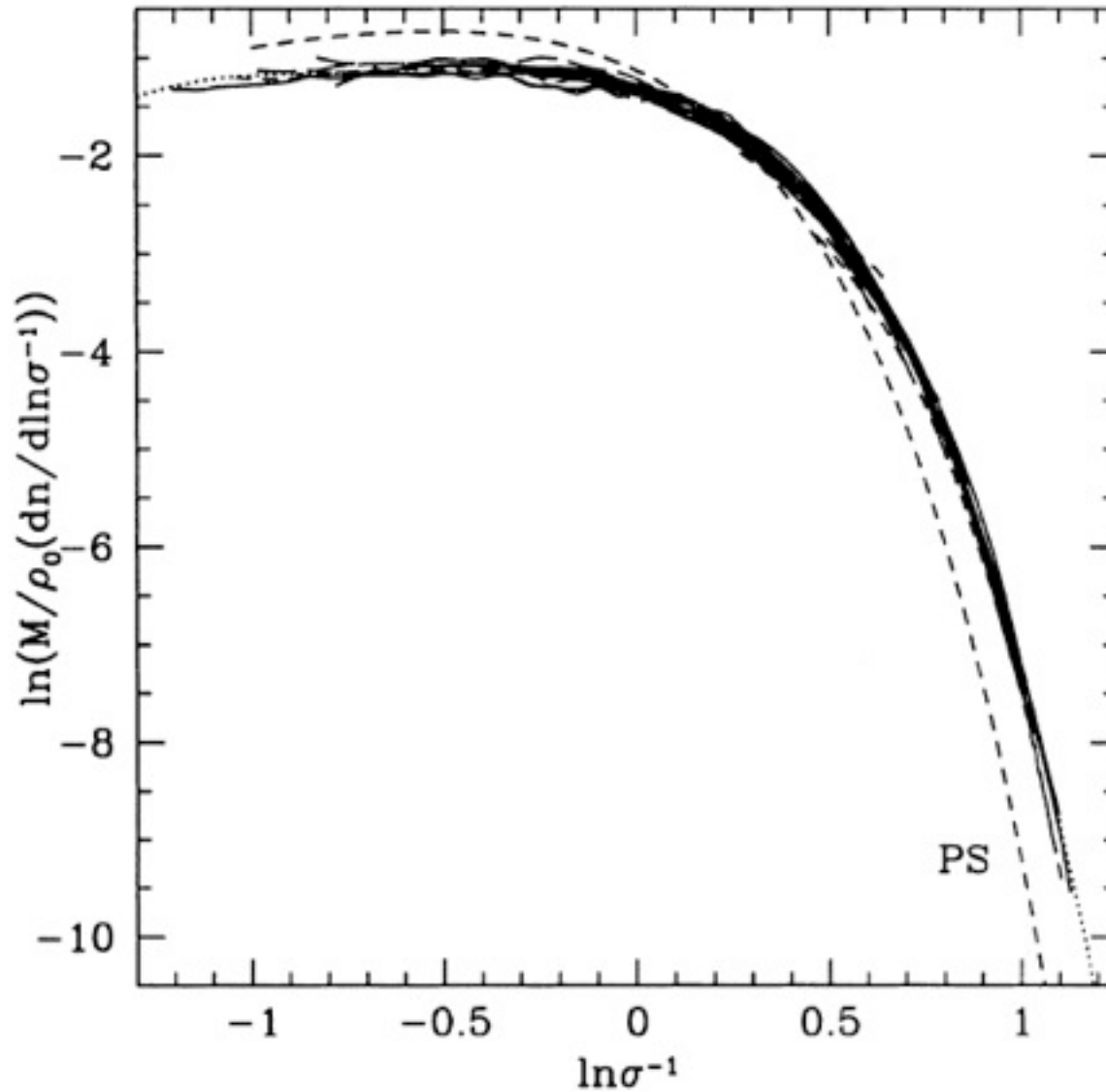
$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \int_0^\infty Mn(M)dM = -\bar{\rho} \int_0^\infty \frac{\partial f(\delta_M \geq \delta_c)}{\partial M} dM \\ &= \bar{\rho} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\delta_c}{\sigma(M)}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]_\infty^0 \\ &= \frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\bar{\rho}}{2} ! \end{aligned}$$

仕方がないので (1) の右辺を単純に2倍して

$$n(M)dM = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\bar{\rho}\delta_c}{M\sigma(M)^2} \frac{\partial\sigma(M)}{\partial M} \exp\left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2}\right) dM$$

P-S mass function

ダークハロ質量関数



Jenkins+'01

角運動量の進化

1 つの halo へと collapse する Eulerian volume V

$$\mathbf{L}(t) = \int_{a^3 V} d\mathbf{r} \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \bar{\rho} a^4 \int_V d\mathbf{x} (1 + \delta(\mathbf{x})) \mathbf{x} \times \mathbf{u}.$$

Lagrangian volume Γ に置き換える: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{q} + \mathbf{S}(\mathbf{q}, t)$

$$\mathbf{L}(t) = \bar{\rho} a^5 \int_{\Gamma} d\mathbf{q} (\mathbf{q} + \mathbf{S}) \times \dot{\mathbf{S}}.$$

Zel'dovich 近似: $\mathbf{S}(\mathbf{q}, t) \simeq D(t) \mathbf{s}(\mathbf{q}) = D(t) \nabla \phi(\mathbf{q})$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(t) &\simeq \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} d\mathbf{q} (\mathbf{q} + D \nabla \phi) \times \nabla \phi \\ &= \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} d\mathbf{q} \mathbf{q} \times \nabla \phi. \end{aligned}$$

$$\therefore L(t) \propto a^2 \dot{D} \propto t$$

角運動量の獲得

$$\phi(\mathbf{q}) = \phi(0) + q_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right|_{\mathbf{q}=0} + \frac{1}{2} q_i \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\mathbf{q}=0} q_j + \dots$$

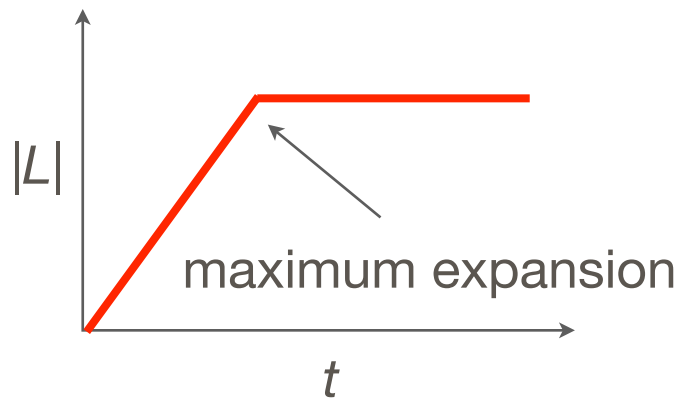
$$\begin{aligned} L_i(t) &\simeq \bar{\rho} a^5 \dot{D} \int_{\Gamma} d^3 q \epsilon_{ijk} q_j q_l \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0} \\ &= a^2 \dot{D} \epsilon_{ijk} \mathcal{I}_{jl} \mathcal{D}_{kl}, \end{aligned}$$

$$\text{where } \mathcal{D}_{kl} \equiv \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_k \partial q_l} \right|_{\mathbf{q}=0} \text{ and } \mathcal{I}_{jl} \equiv \bar{\rho} a^3 \int_{\Gamma} d^3 q q_j q_l.$$

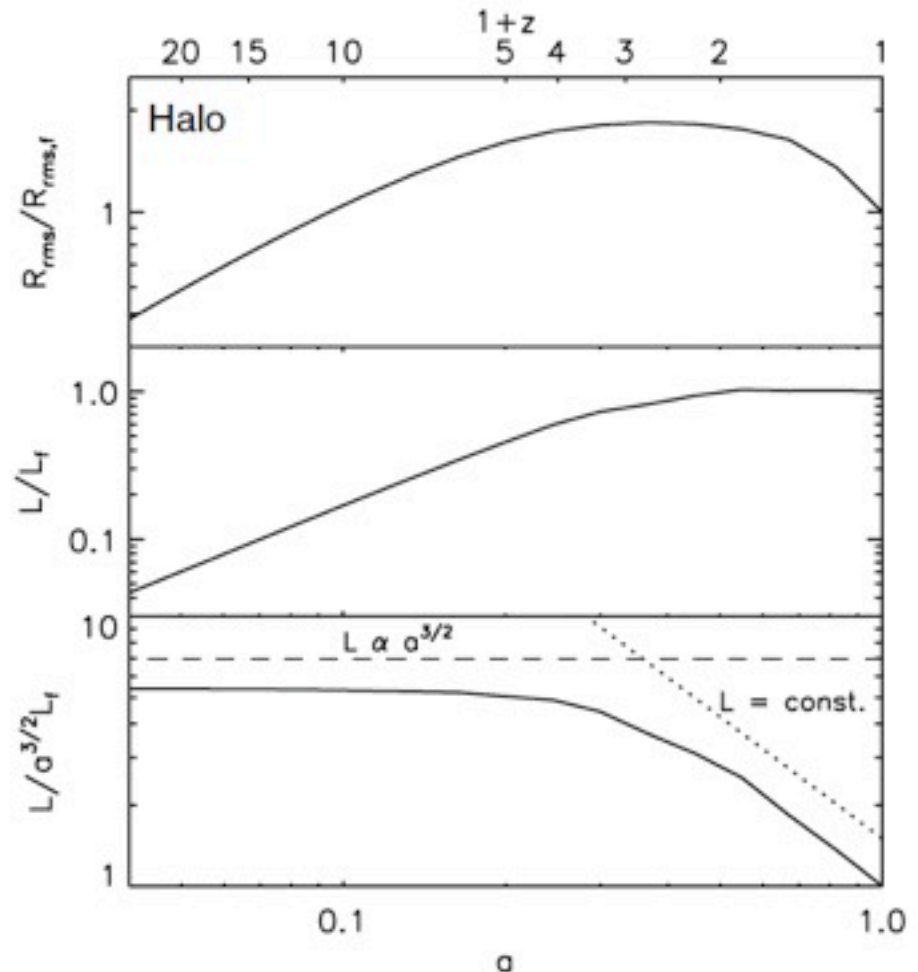
Γ の四重極モーメントと tidal field の
misalignment で角運動量を獲得

線形理論の予言

Λ CDM simulation



Turnaround まで角運動量を $|L| \propto a^{3/2} \propto t$ で獲得し, 収縮に転じると tidal field から切り離されて $|L| \sim \text{const.}$ となる.



無衝突系の緩和

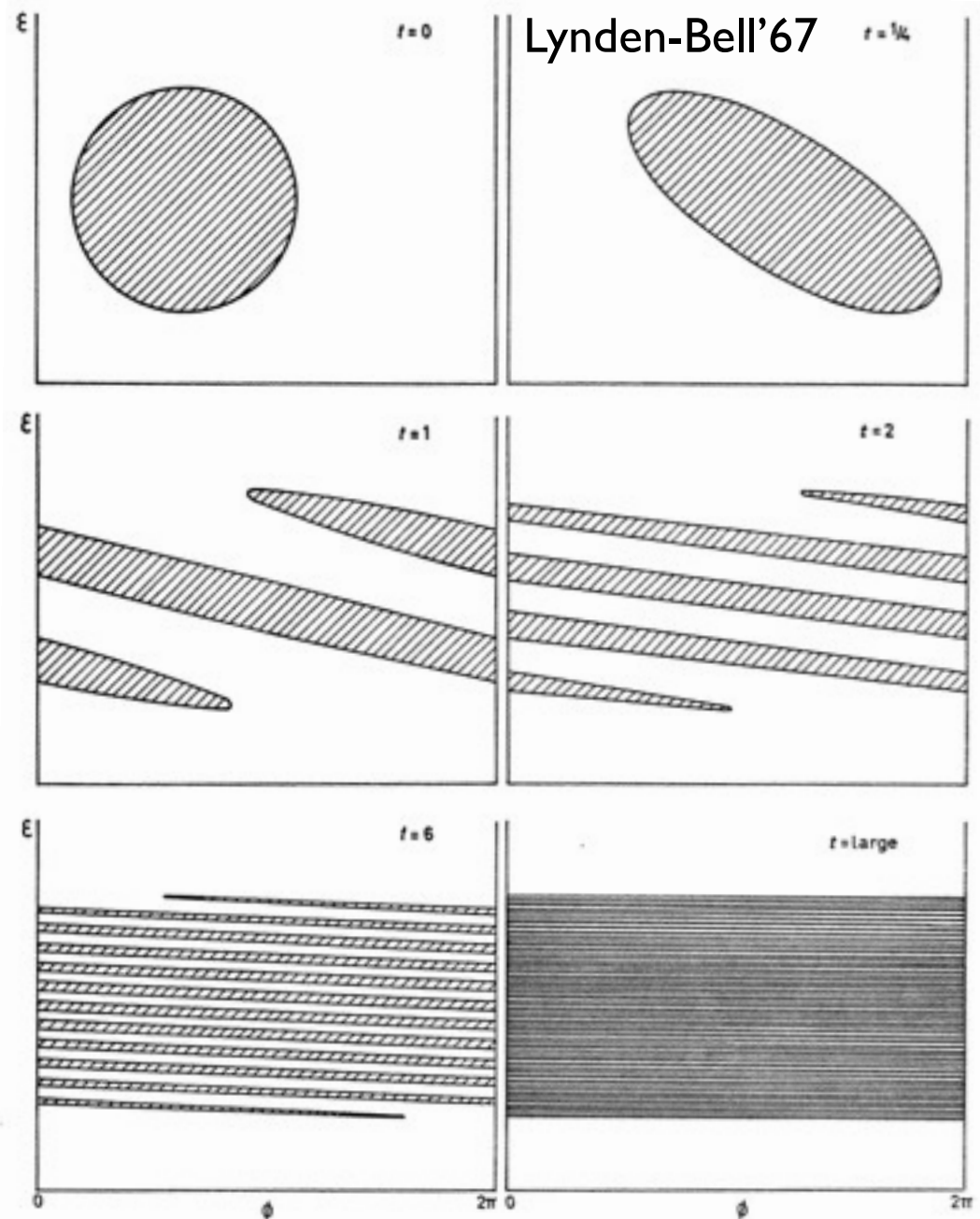
- 銀河やダークハローは無衝突系と考えられる
- 二体緩和のタイムスケールは宇宙年齢より十分長い

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f - \nabla \Phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0.$$

- ダークハローや楕円銀河はどうやって力学平衡に？

Phase-mixing

- 様々なエネルギーでポテンシャルの井戸の中を運動する粒子群
- $f = f(E, \Phi)$
- $E \rightarrow \text{大} \Rightarrow \text{周期} \rightarrow \text{大}$
- 分布関数の占める領域は時間とともに細分化
- 巨視的に見れば f はある一定の関数系に漸近的に近づいて行く



Violent relaxation

- collapse や合体 → 時間空・間的に重力ポテンシャル ψ が激しく変動.

- $\frac{de}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$

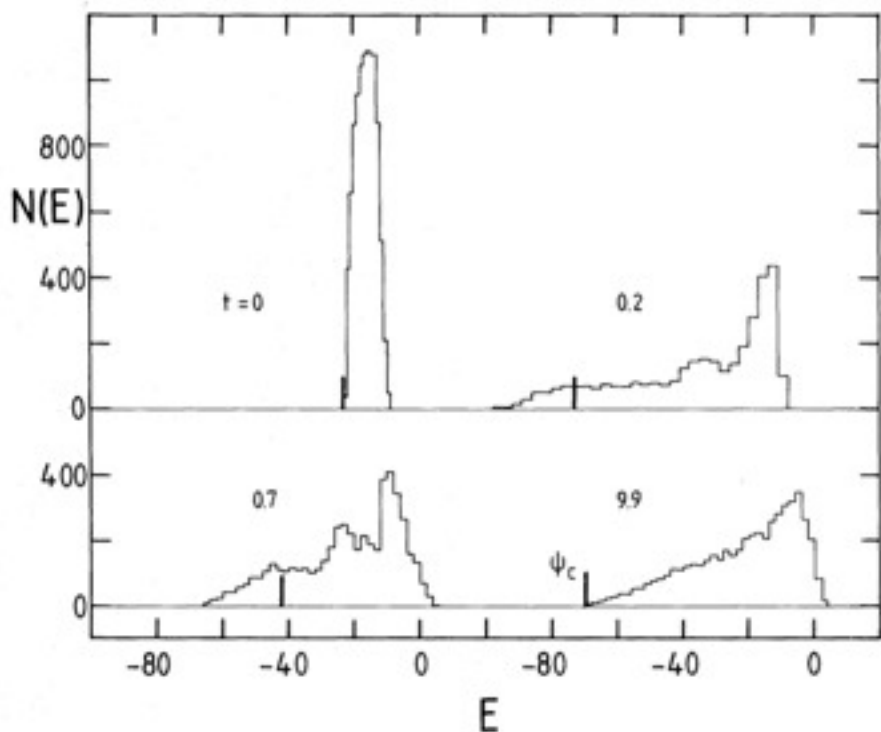
- $\tau_r = \left\langle \frac{(de/dt)^2}{e^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}} = \left\langle \frac{(\partial\psi/\partial t)^2}{e^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}$

- 平均的には $\frac{mv^2}{2} \sim -\frac{m\psi}{4} \therefore e \sim \frac{3}{4}\psi$

- $\tau_r \sim \frac{3}{4} \left\langle \frac{(\partial\psi/\partial t)^2}{\psi^2} \right\rangle^{-\frac{1}{2}}$

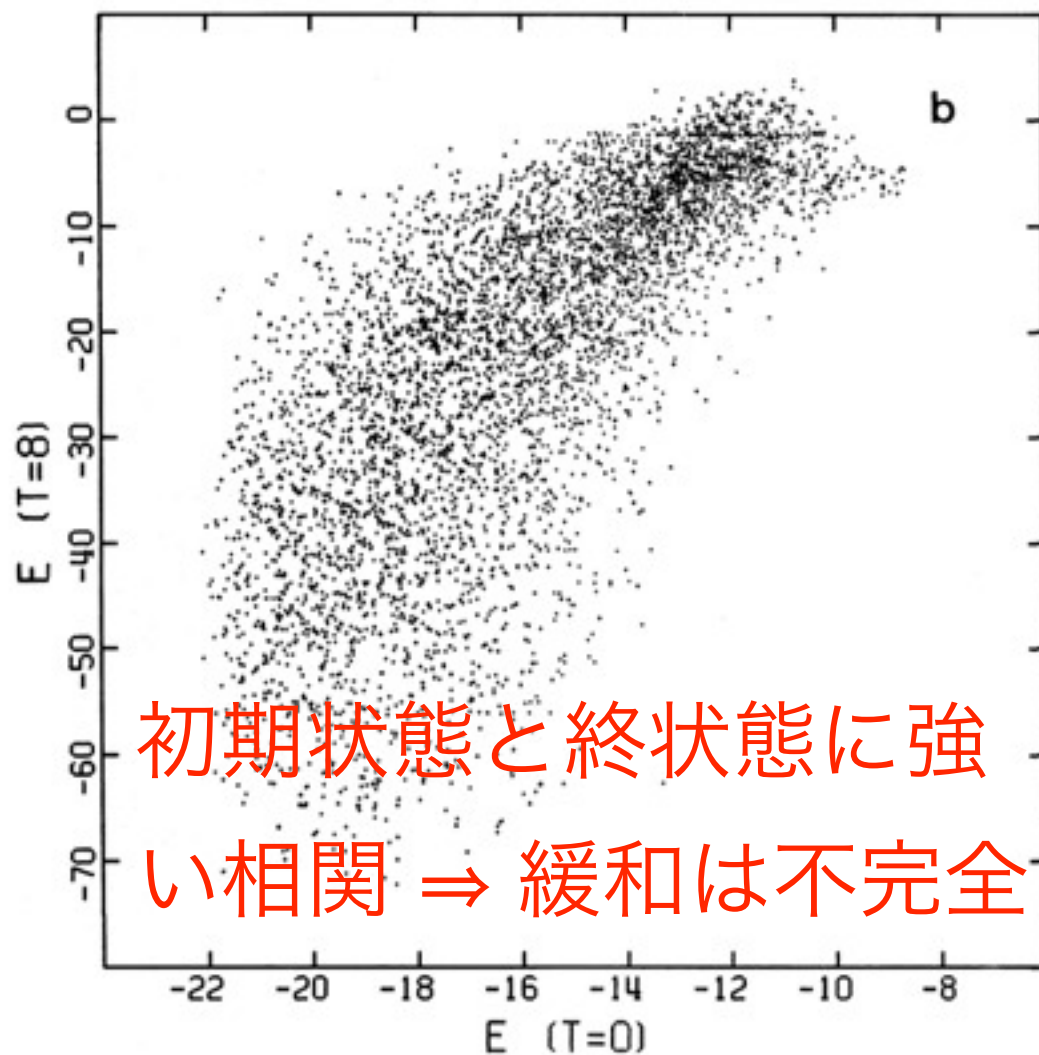
- だいたい dynamical time で virialize する

Violent relaxation で 実現される力学状態



時間とともに $N(E)$ が広がっていく

van Albada'82



初期状態と終状態に強い相関 \Rightarrow 緩和は不完全

CDM モデルと銀河形成

銀河形成の初期条件

- 銀河や銀河団のような天体は宇宙の初期密度揺らぎから生まれる
- 初期密度揺らぎの性質を決めれば初期条件が決まる
- inflation (flat) + random Gaussian 揺らぎ

密度揺らぎの進化

- 構造形成の driving force はダークマターの自己重力
- 非線形段階まで含めて N 体 simulation を用いて詳しく調べられている
 - ダークハローの質量関数
 - ダークハローの構造

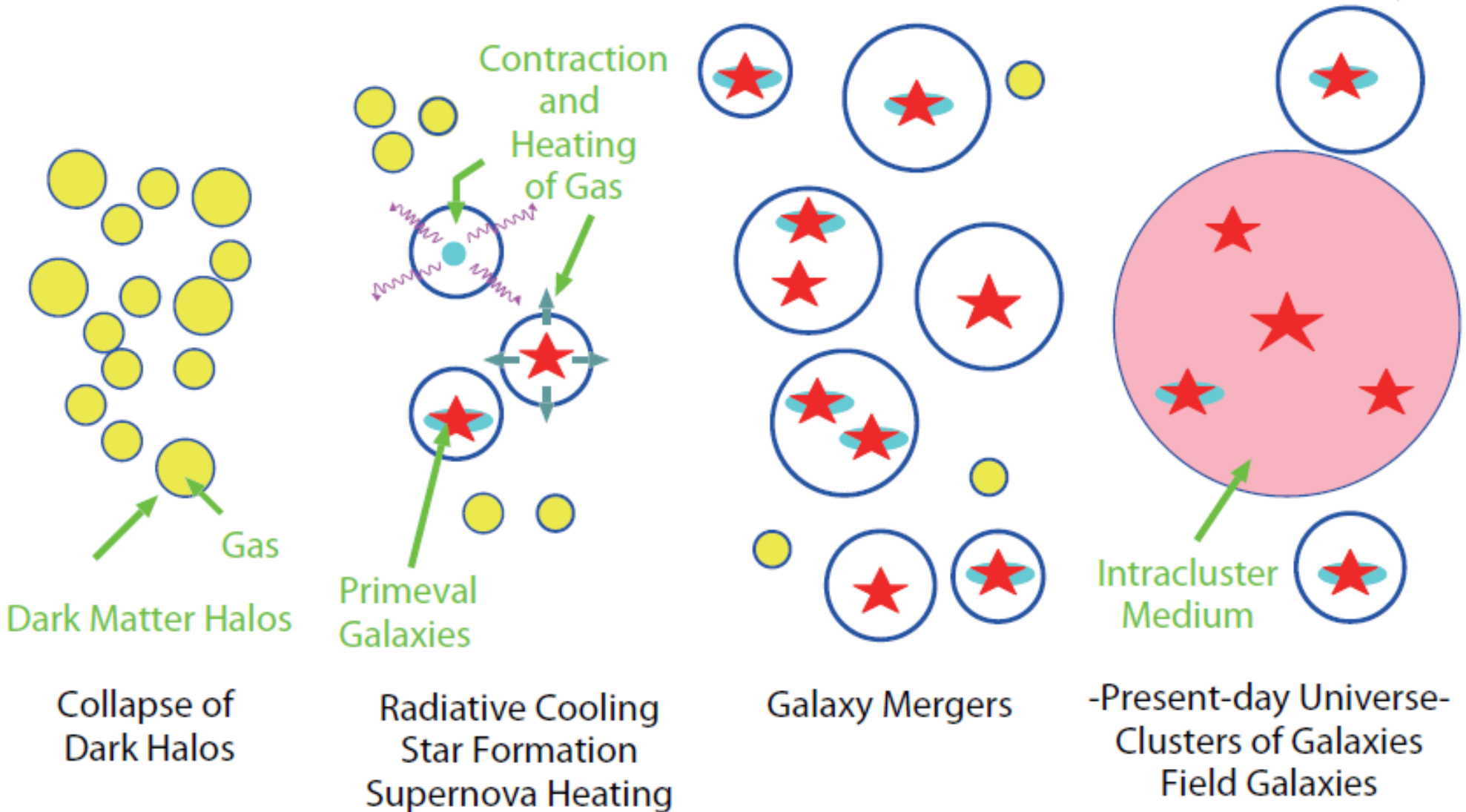
バリオンの効果は

- バリオンとダークマターの最大の違い
 - バリオンはエネルギーを散逸できる
 - ▶ バリオンはダークマターよりも中心集中度の高い分布をする
 - ▶ ハロー中心部ではバリオンの重力が支配的
 - ダークハローの構造だけを考える場合もバリオンを考慮する必要がある

銀河形成の描像

early Universe

present day



考えるべき物理過程

- 初期条件: Λ CDM (特定の銀河の特定の初期条件を与えるわけではない)
- 自己重力: ダークマター + ガス + 星

- Gas dynamics: 流体力学
- ガスの放射冷却, 化学反応
- 星形成
- 加熱過程 (フィードバック)
- 化学進化 (重元素汚染)

subgrid

バリオンの物理

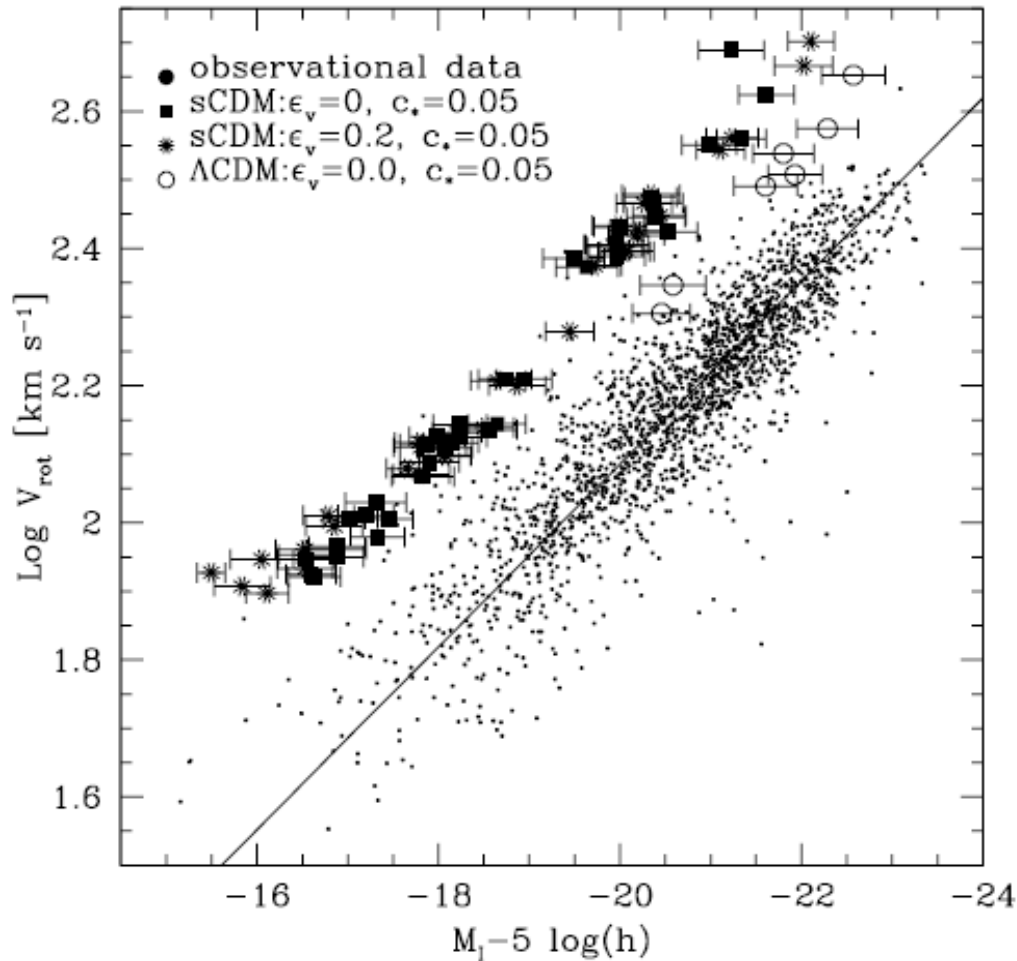
銀河形成と Λ CDM

- Λ CDM に基づいたシミュレーションにより銀河スケールでいくつかの問題が報告されてきた
 - **角運動量問題:** 天の川銀河のような円盤銀河が Λ CDMを仮定したシミュレーションではほとんど形成されない
 - **衛星銀河問題:** 銀河のダークハローはサブハローと呼ばれる構造を持つがCDMが予言するサブハローの数は衛星銀河のそれよりも桁が多い
 - **コア-カスプ問題:** CDM はダークハローが中心部で cusp 構造を持つことを予言するが, 低表面輝度銀河の観測は core の存在を示唆
sim. $\rho(r) \propto r^{-1 \sim -1.5}$ **obs.** $\rho(r) \sim \text{const.}$

銀河形成と Λ CDM

- Λ CDM に基づいたシミュレーションにより銀河スケールでいくつかの問題が報告されてきた
 - **角運動量問題:** 天の川銀河のような円盤銀河が Λ CDMを仮定したシミュレーションではほとんど形成されない
 - **衛星銀河問題:** 銀河のダークハローはサブハローと呼ばれる構造を持つがCDMが予言するサブハローの数は衛星銀河のそれよりも桁が多い
 - **コア-カusp問題:** CDM はダークハローが中心部で cusp 構造を持つことを予言するが, 低表面輝度銀河の観測は core の存在を示唆
sim. $\rho(r) \propto r^{-1 \sim -1.5}$ **obs.** $\rho(r) \sim \text{const.}$

角運動量問題



Navarro & Steinmetz '00

- Tully-Fisher 関係

- 円盤銀河の回転速度

$$v_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

と絶対光度の間の観測的
関係

- シミュレーションの銀河
は光度に対して回転速度
が大きすぎる



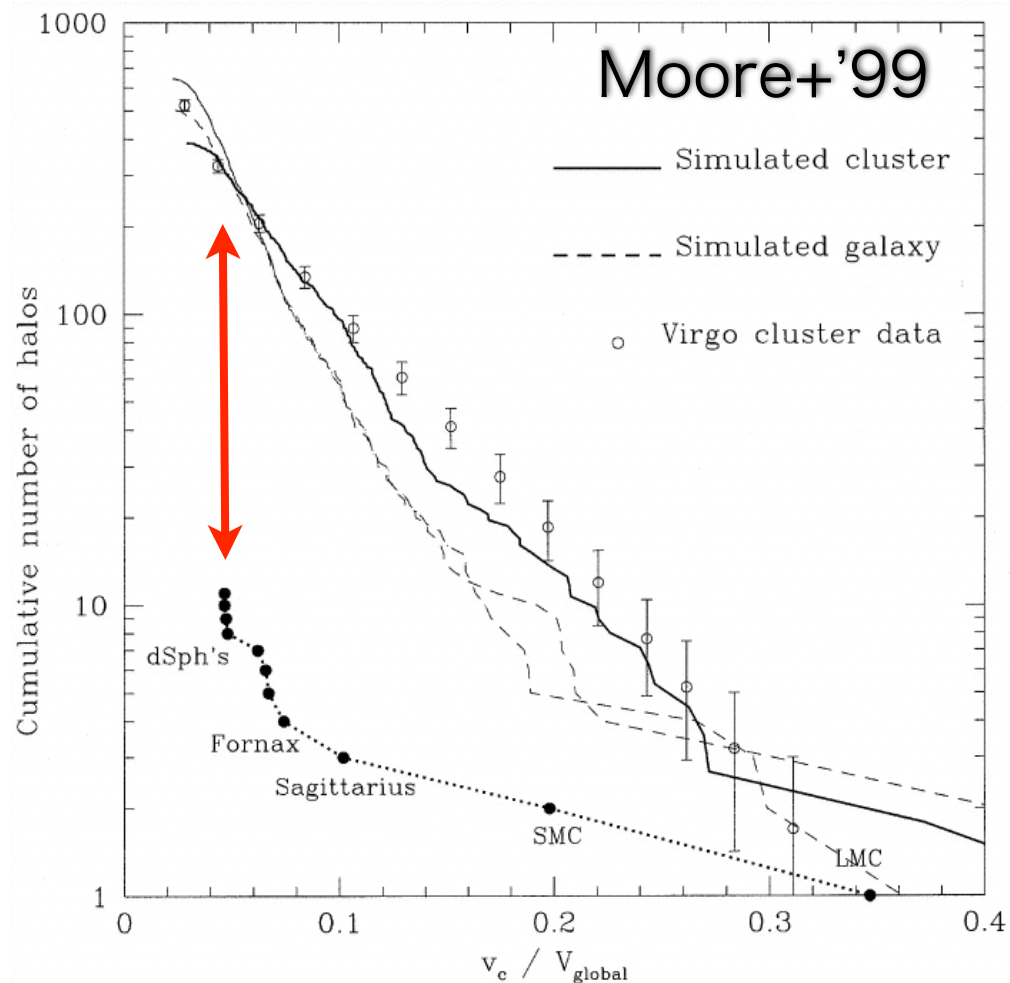
- 質量が中心集中し過ぎ

衛星銀河問題

- Λ CDM の予言する
回転速度の関数とし
てのサブハローの数
は、実際に観測され
る衛星銀河のかずよ
りも一桁以上多い

単純に暗くするだけでは駄目

個数 ($> v_c$)

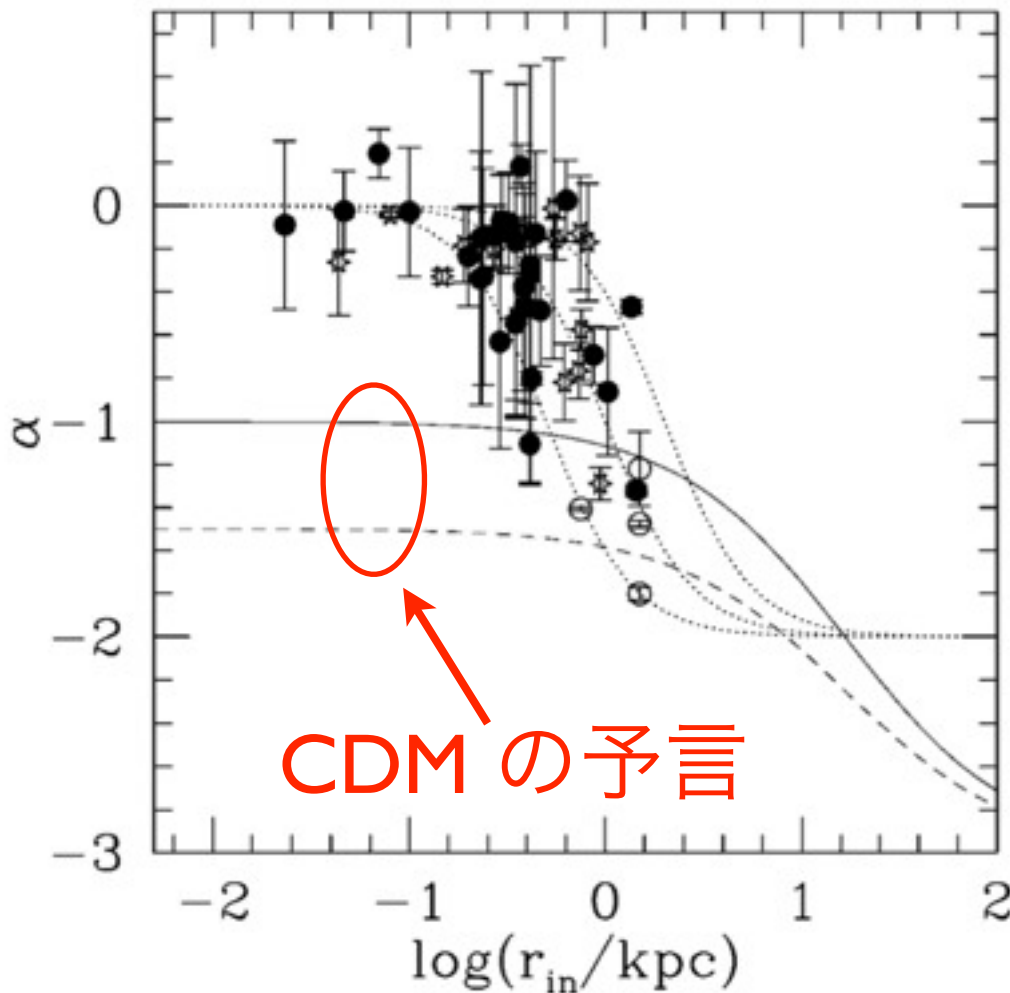


回転速度

$$v_c = \sqrt{\frac{GM(< R)}{R}}$$

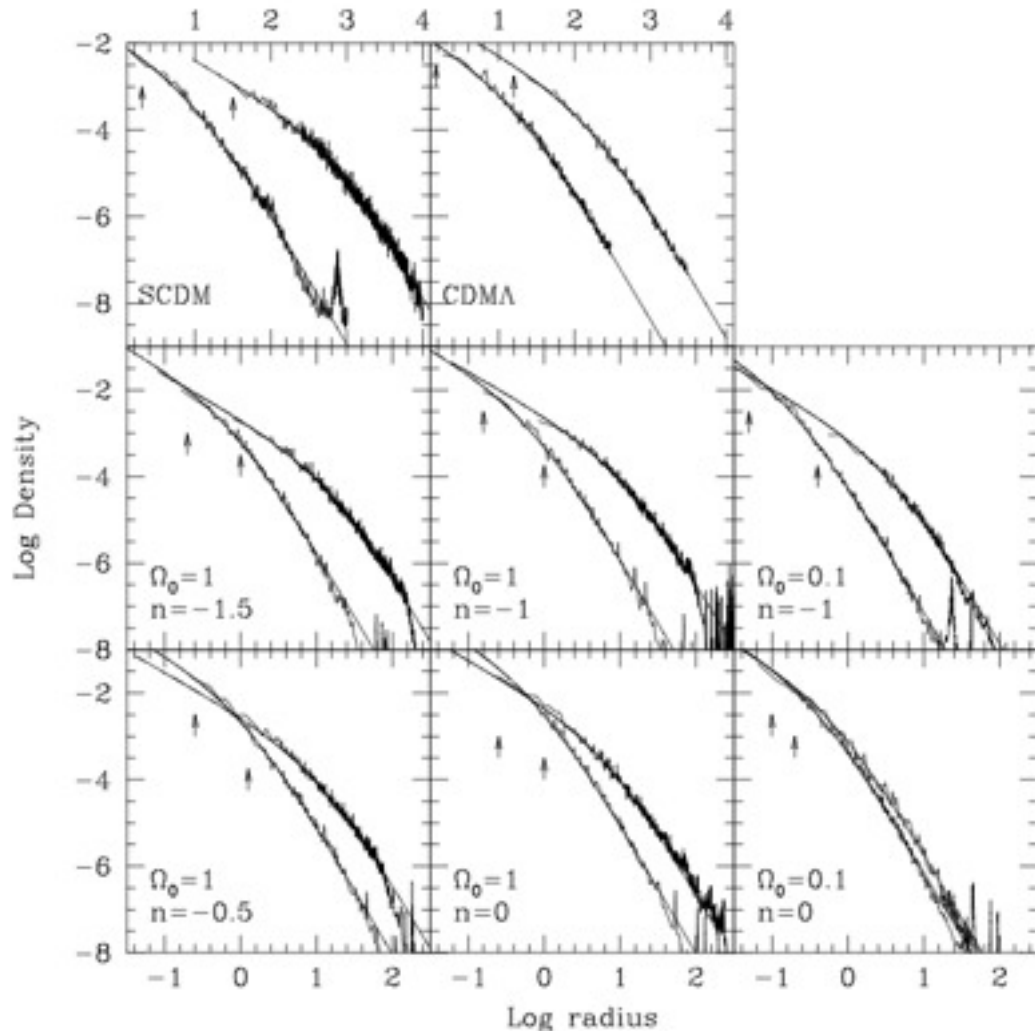
Core-Cusp 問題

De Block+'01



- 低表面輝度銀河の密度プロファイルのべき
- 低表面輝度銀河: バリオンをほとんど含まない銀河
- CDM が内側で $\alpha = -1 \sim -1.5$ を予言するのに対して $\alpha \sim 0$.

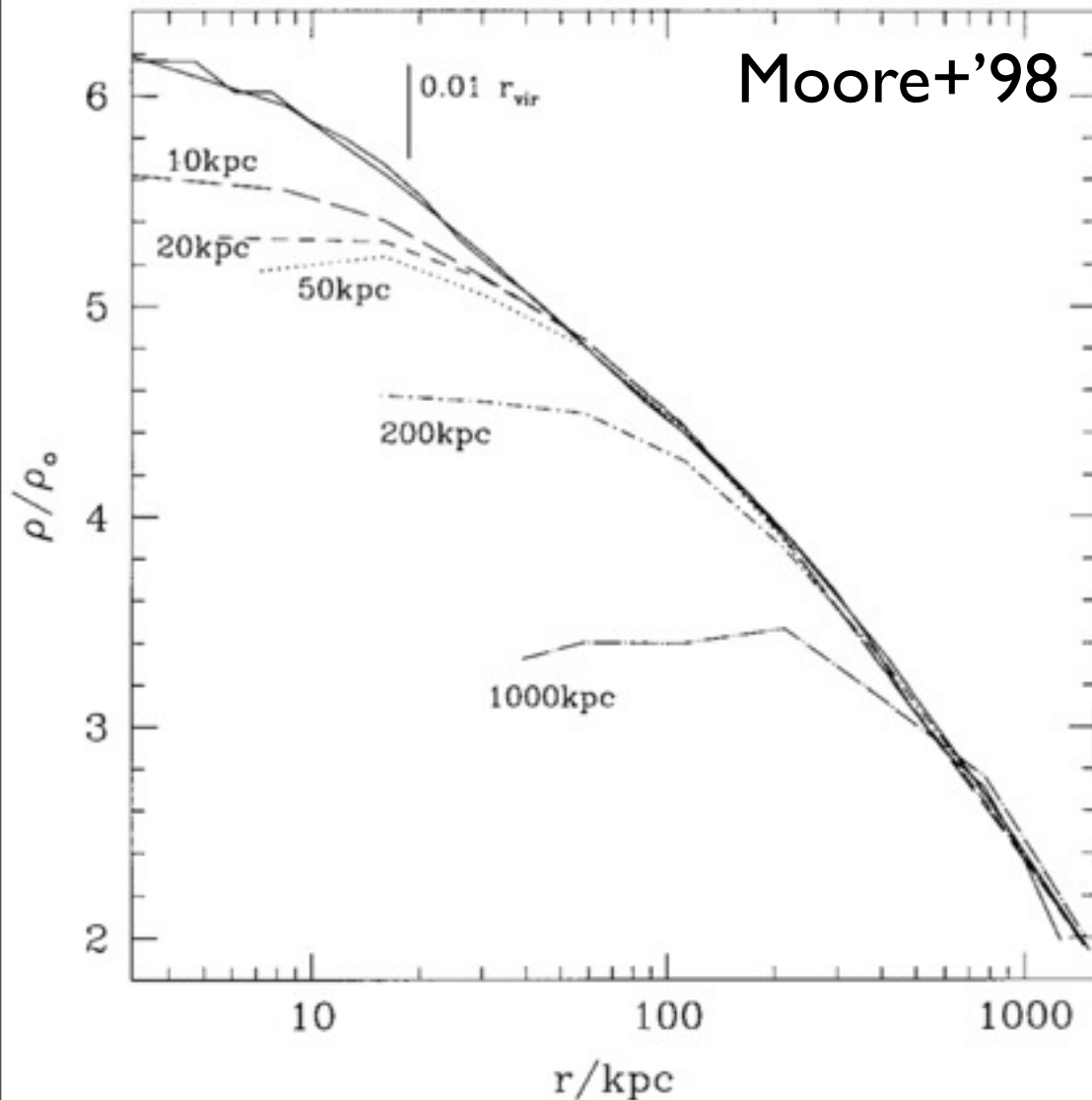
N-body simulation による密度 profile



- NFW profile
 - 宇宙モデル, ハロー質量によらず universal
 - $\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}$
 - 内側で r^{-1} , 外側で r^{-3}
 - ビリアル半径内に 10^4 体程度. r_s と重力 softening がコンパラ

Navarro, Frenk, & White '97

Moore profile



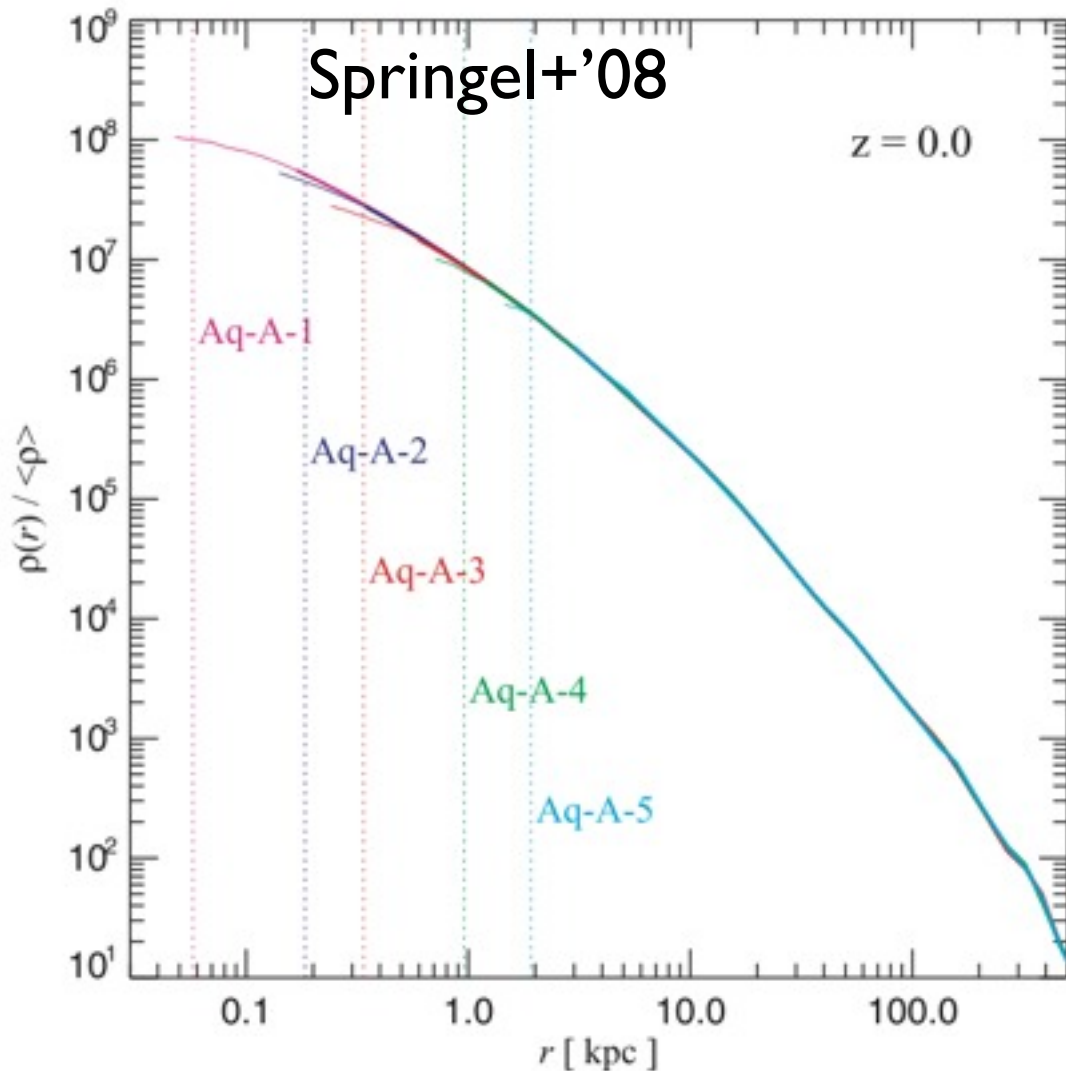
- 粒子数を増やしていくと (ビリアル半径内に 10^6 体) inner profile

は $\rho(r) \propto r^{-1.5}$

(Fukushige & Makino'97, TO & Habe'99)

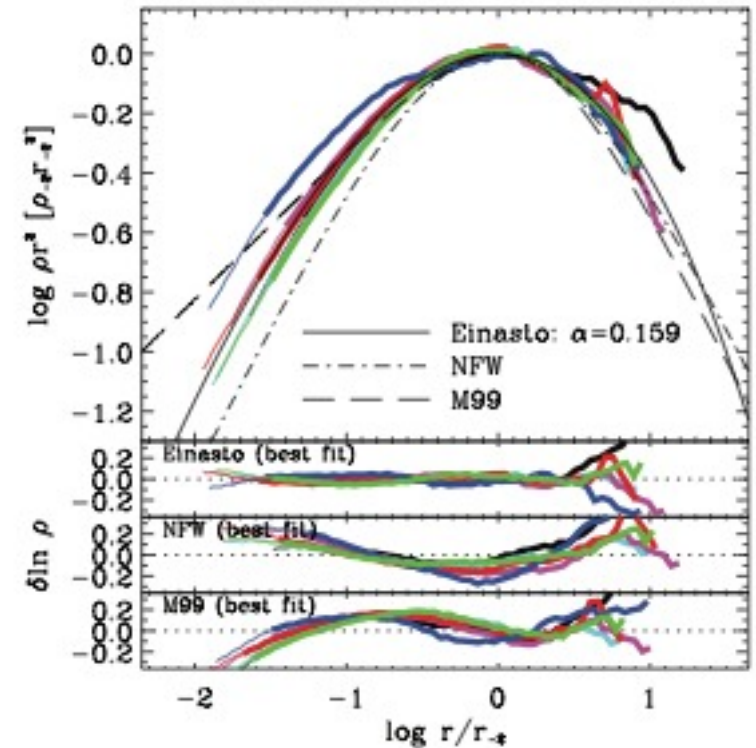
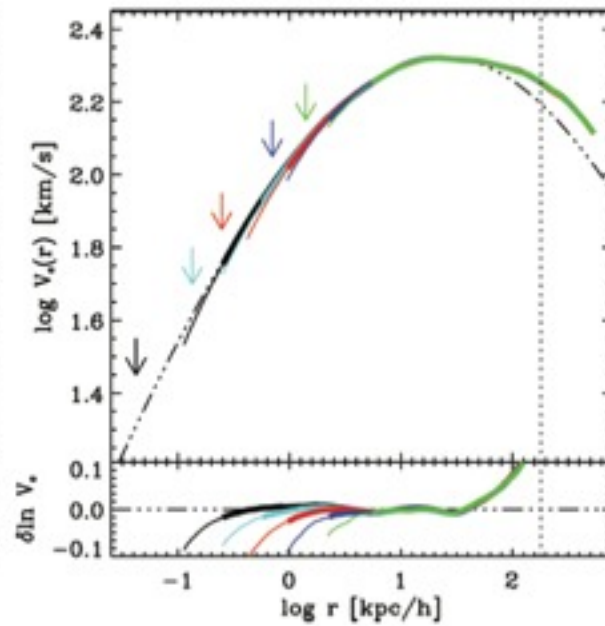
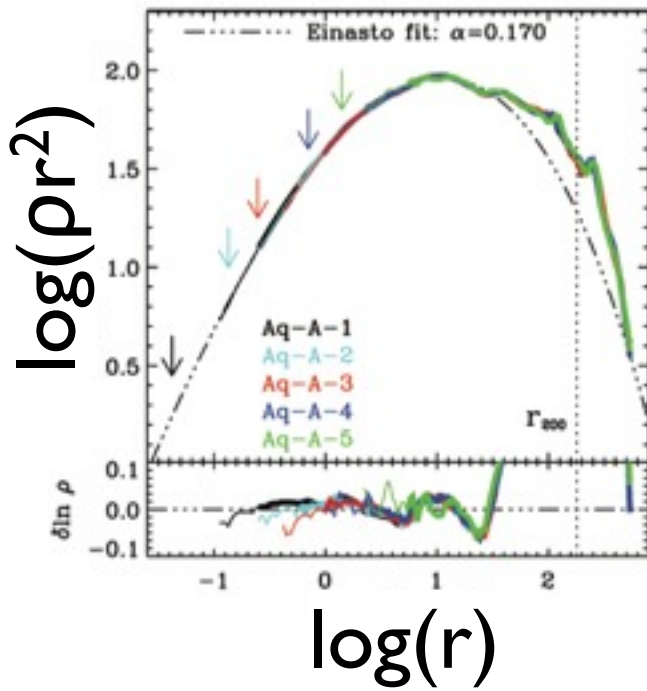
- $$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)^{1.5} (1 + r/r_s)^{1.5}}$$

Higher resolution



- r_{vir} 内に 10^9 粒子
- resolution を上げていくと確かに収束していくが, 単一のべきという感じはしない

Einasto profile



$$\ln \left(\frac{\rho(r)}{\rho_{-2}} \right) = -\frac{2}{\alpha} \left[\left(\frac{r}{r_{-2}} \right)^\alpha - 1 \right]$$

N体の結果まとめ

- とにかく CDM だけ考慮した場合の inner profile は r^{-1} より steep
- 低表面輝度銀河の観測とは矛盾
- Warm Dark Matter?

バリオンが DM 密度プロファイルに与える影響

- 最初 DM と同じように分布していたガスが冷えて中心に集まる場合
- 中心に集まる timescale は free-fall time 程度
- relaxation の timescale と同じくらい
- 断熱変化を考える

Dynamical response

- 円軌道. 半径 R_i の内の質量が M_i から M_f に変化し $M(<R_f) = M_f$ で vrialize.

$$\frac{1}{2}v_i^2(R_i) - \frac{GM_f}{R_i} = \frac{1}{2}v_f(R_f) - \frac{GM_f}{R_f},$$

where $v^2(R) \equiv GM(< R)/R$.

$$\therefore \frac{R_i}{R_f} + \frac{M_f/M_i}{1 - 2[M_f/M_i]} = 0.$$

- $M(R) = M^b(R) + M^d(R) \quad \therefore M_i^d = M_f^d = M^d.$

$$\frac{R_f}{R_i} = \frac{M^d + M_f^b}{2M_f^b + M^d - M_i^b}.$$

Adiabatic contraction

- 小さなことからコツコツと

$$R_f = R_i + dR_i \text{ \& } M_f = M_i + dM_i.$$

- Response の式に代入して線形化

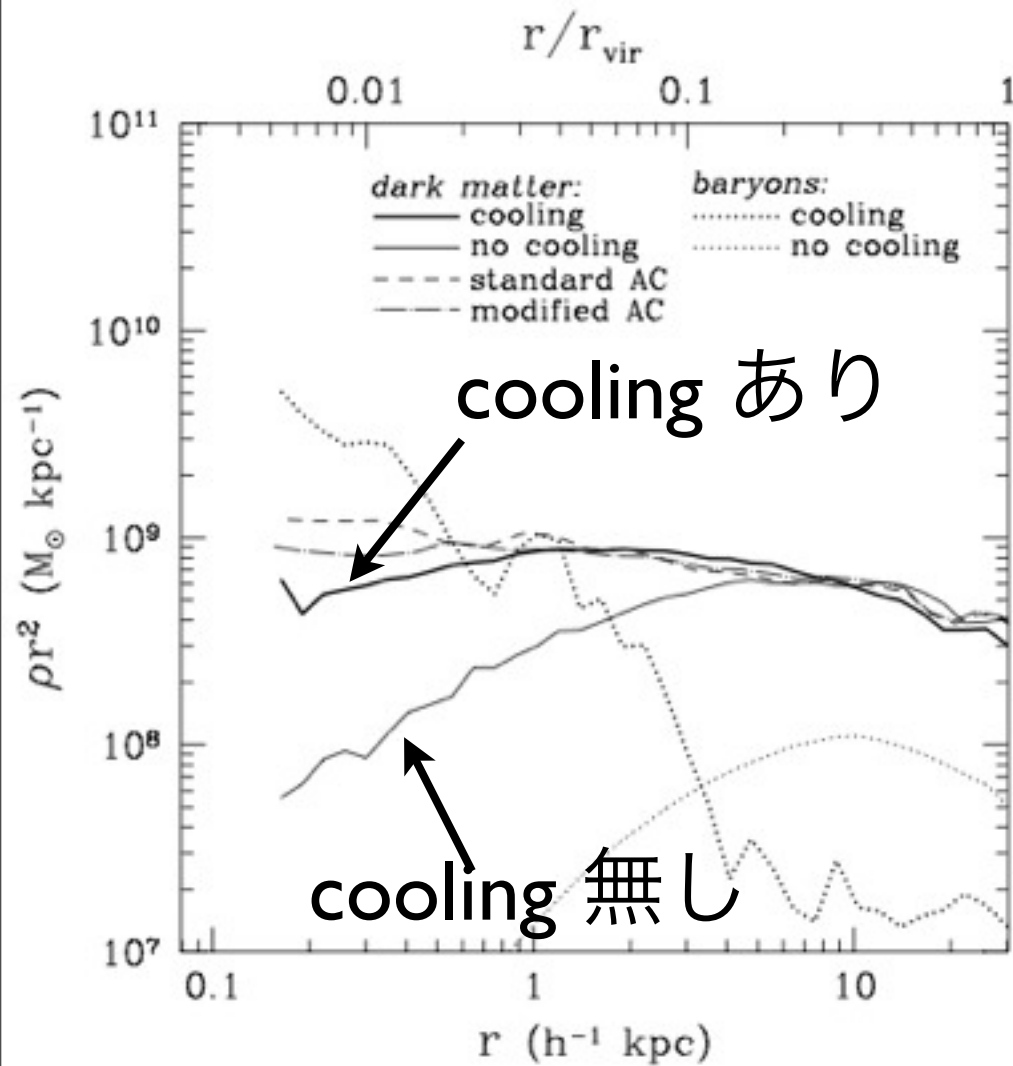
$$\frac{dR_i}{R_i} - \frac{dM_i}{M_i} = 0.$$

$$\int_{R_i}^{R_f} \frac{dR}{R} = - \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M},$$

$$M_i R_i = M_f R_f \Rightarrow [M^d(R_i) + M^b(R_i)] R_i = [M^d(R_i) + M^b(R_f)] R_f$$

- これは mass shell の角運動量保存を仮定した Blumenthal+'86 と同一

AC in simulations



Gnedin+'04

- 宇宙論的シミュレーションでも non-circular orbit を考慮した adiabatic contraction のモデルはそれなりに上手くいく
- 銀河系ダークハローの密度プロファイルを見積もるのに使われたりした

で？

- contraction だけでは絶対に DM だけの simulation と比較して中心部の cusp は steep になる
- 低表面輝度銀河はバリオン poor
- 集めたバリオンを feedback で取り除けば！？
- adiabatic contraction の逆プロセスなので元の profile に戻るだけ

逆プロセス？

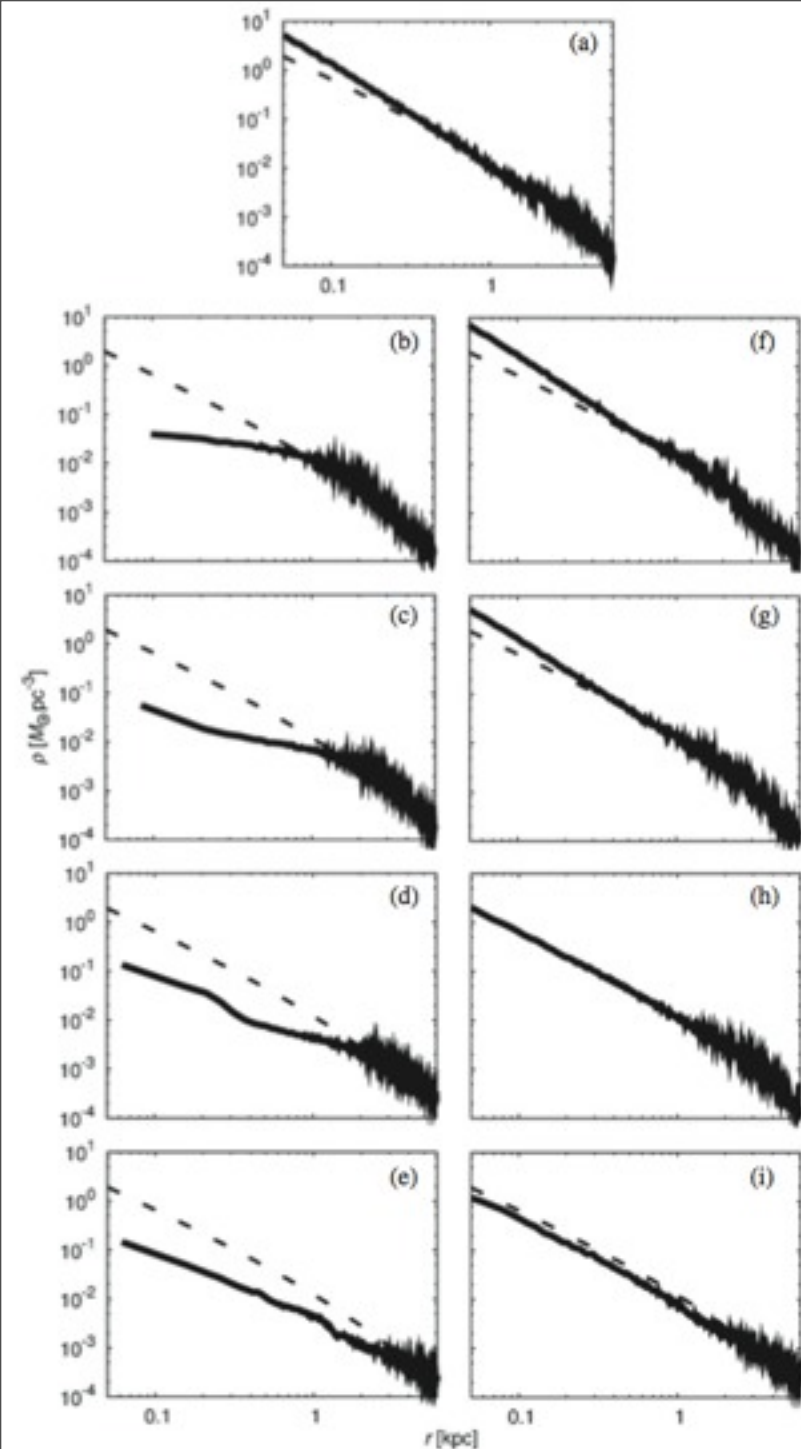
- フィードバックによるガスの流出はゆっくり起こる必要はない
- Instantaneous gas removal: $R < R_i$ で $M^d = M^b$. M^b が突然半分になったとする

$$\frac{R_f}{R_i} = \frac{M_f/M_i}{2[M_f/M_i] - 1} \rightarrow \frac{3}{2},$$

$$\text{AC: } \frac{R_f}{R_i} = \frac{M_i}{M_f} \rightarrow \frac{4}{3}.$$

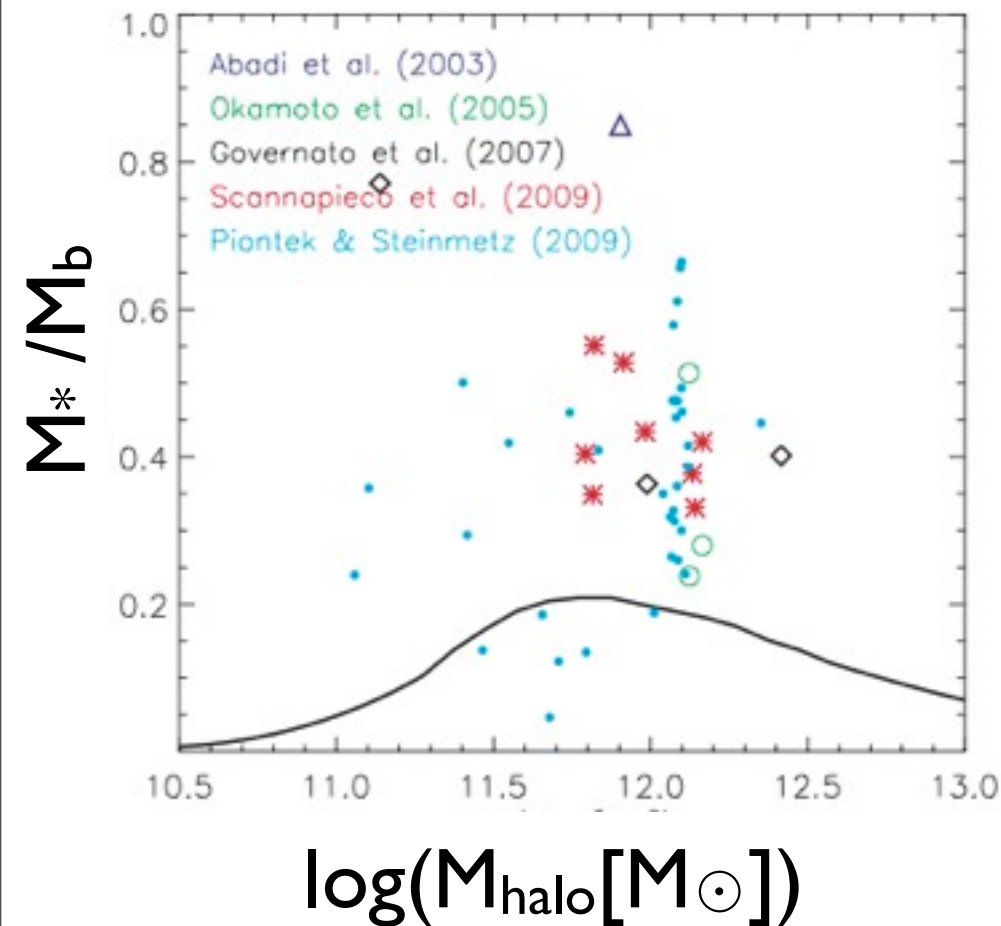
- ゆっくり集めて素早く取り除けば良い

数値実験



- 左: 中心に足したポテンシャルをいきなり取り除いた場合
- 右: 50 dynamical time かけてゆっくり取り除いた場合
- 突然取り除いた方が効果は大きい
- core?

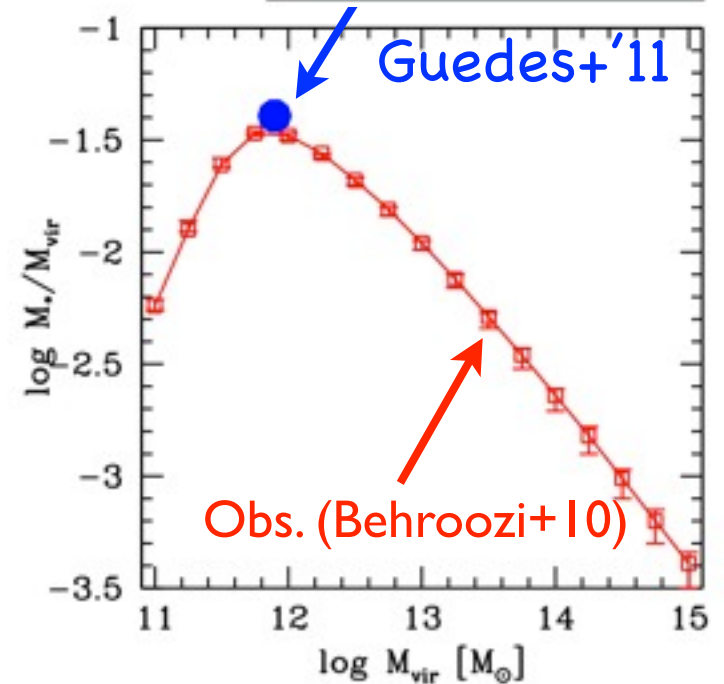
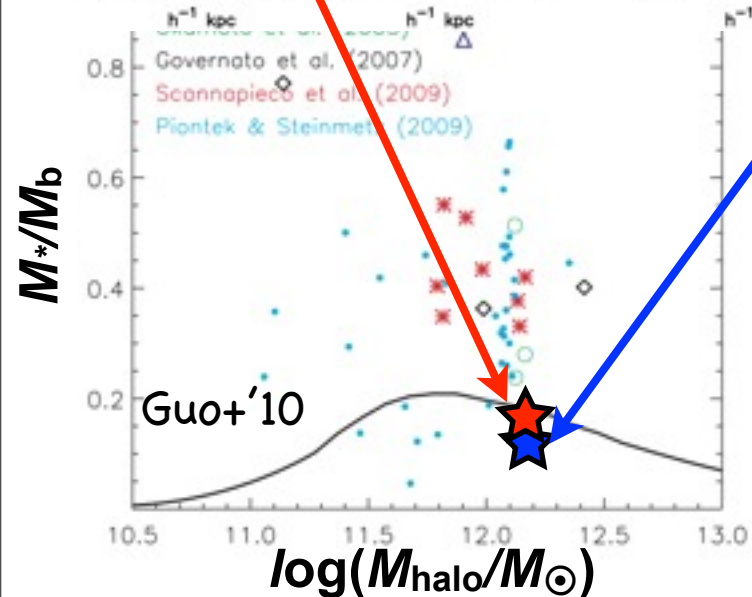
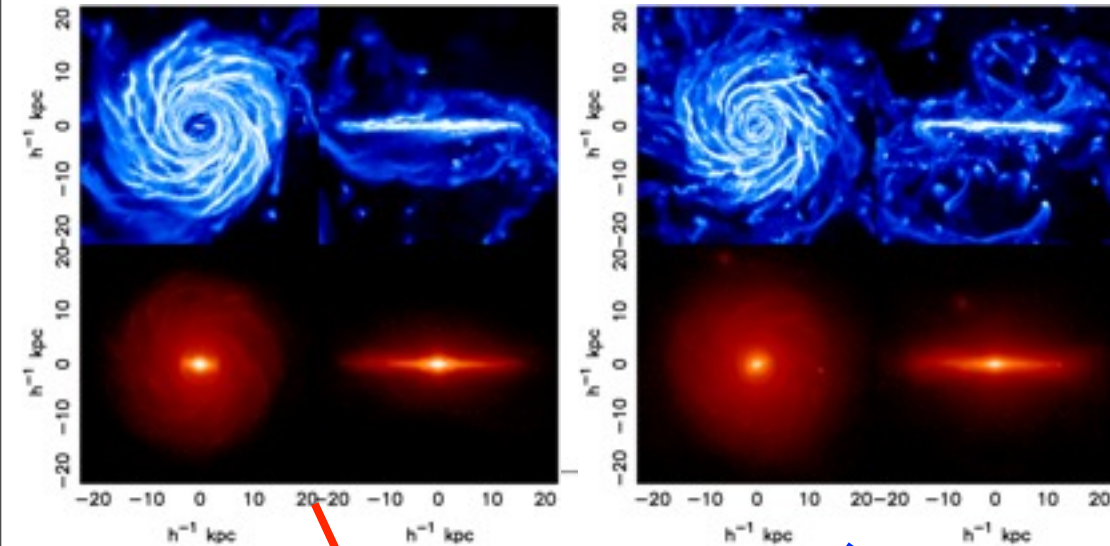
銀河形成シミュレーション



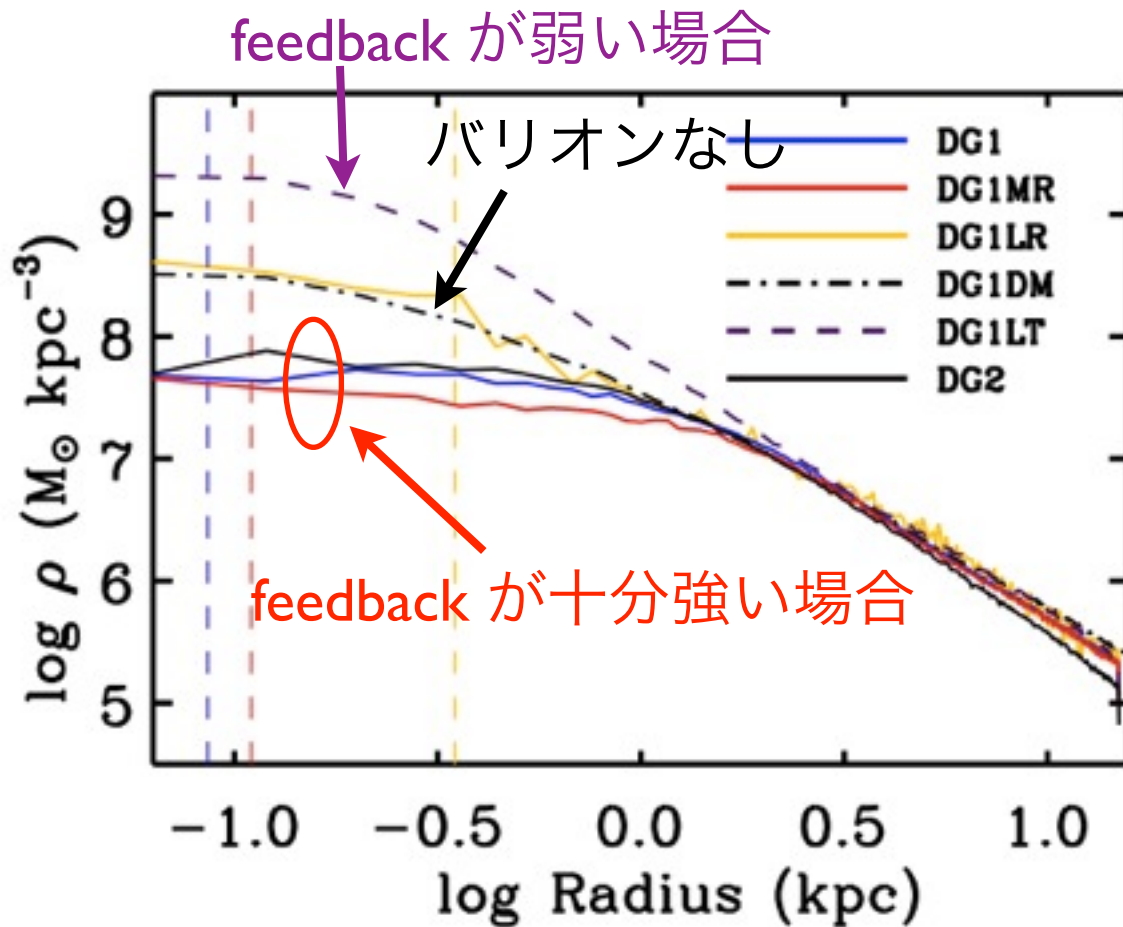
- 基本的にシミュレーション
んでは星を作り過
ぎている
- フィードバックが
弱すぎる

最近のシミュレーション

TO 2012



DM core in a cosmological simulation



十分 feedback が強いと矮小銀河のハローにはコアができる

THE FORMATION OF A BULGELESS GALAXY WITH A SHALLOW DARK MATTER CORE

Fabio Governato (University of Washington)
Chris Brook (University of Central Lancashire)
Lucio Mayer (ETH and University of Zurich)
and the N-Body Shop

KEY: Blue: gas density map. The brighter regions represent gas that is actively forming stars. The clock shows the time from the Big Bang. The frame is 50,000 light years across.

Simulations were run on Columbia (NASA Advanced Supercomputing Center) and at ARSC

Core の作り方

- 高分解能
- 星形成が起こるガス密度を十分高くする
(ガスを十分に中心に集めてから星に)
- 十分強いフィードバック
- フィードバックは episodic

まとめ

- Gas cooling による adiabatic contraction と feedback による fast gas removal の繰り返して低表面輝度銀河のダークハロー中心部にコアを作ることができる
- 「十分強い」 feedback が実現できれば CDM と観測は矛盾しない

考えるべき物理過程

- 初期条件: Λ CDM (特定の銀河の特定の初期条件を与えるわけではない)
- 自己重力: ダークマター + ガス + 星

- Gas dynamics: 流体力学
- ガスの放射冷却, 化学反応
- 星形成
- 加熱過程 (フィードバック)
- 化学進化 (重元素汚染)

バリオンの物理

実際の取り扱い

- 自己重力: 適当な Poisson solver 粒子系はN体
- 流体: SPH, AMR 等の Lagrange 的な方法
- 放射冷却: 冷却関数 $\Lambda(T, Z)$
 - 何らかの平衡を仮定する
 - 非平衡化学反応を解く場合は大抵 $Z = 0$

- **星形成**: 低温・高密度のガスから星粒子 (stellar population) を作る. IMF は仮定. 星形成領域は分解できない
- **フィードバック**
 - 超新星爆発. 星粒子の周囲のガスにエネルギーを与える
(**高密度ガスなのですぐに冷えてしまう**)
 - 運動エネルギーの形で与えたり, 一定時間ガスの冷却を止めたり
 - AGN feedback, cosmic ray, etc.

フィードバック (問題点)

- 若い星の周囲のガスは高密度なのでエネルギーを与えてもすぐに放射冷却で失われる (Katz'92)
- **90 ~ 00年代初期には, 星間ガスの多相構造が分解できれば解決できる問題であると信じられていた**
- 処方箋 1: 暫くの間, 加熱されたガスの冷却を止めて断熱膨張させる (e.g. Tacker & Couchman 01, Stinson+06)
 - しばらくの間って?
 - どれだけの量のガスにエネルギーを与えるか?
- 処方箋 2: 熱ではなく運動エネルギーとして与える
 - すぐに高密度のガスに当たって thermalize (→ 冷える)
 - エネルギーを質量と速度にどう割り振るか ($E = 1/2 m v^2$)

現状

- 非常識なくらい強いフィードバックを仮定
 - 超新星爆発のエネルギーの全てを銀河風の加速に使ったり
 - 超新星爆発のエネルギーの全てを星間ガスの加熱に使い, しばらく ($\sim 10^7$ yr) ガス冷却を止めたり
- resolution が解決する問題なのか, 超新星爆発以外のエネルギー源が必要なのか, やっぱり CDM ではまずいのかは open question.

付録: 銀河形成シミュ レーションの技法

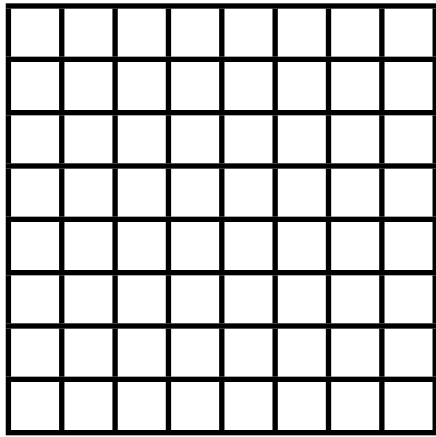
特徴

- 広い dynamic range
 - 100 Mpc ~ pc
 - ほぼ一様な密度分布からの collapse を追う必要がある
 - 初期条件: zoom initial condition
 - 自己重力: N体 - Tree, PM+Tree などでは $O(N^2)$ を $O(N \log N)$ に
 - 流体: SPH のような Lagrange 的方法, もしくは adaptive mesh refinement 法のように密度の高い所に計算要素を増やす方法が用いられる
 - 独立時間刻み

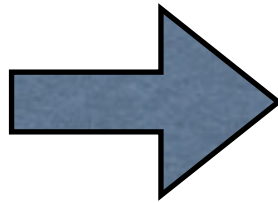
赤で書いた工夫は並列化効率を出しづらくする

Zoom initial condition

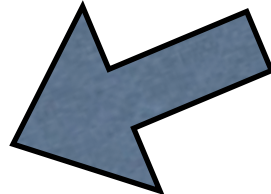
low resolution initial condition



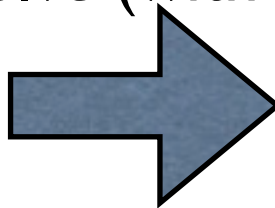
evolve



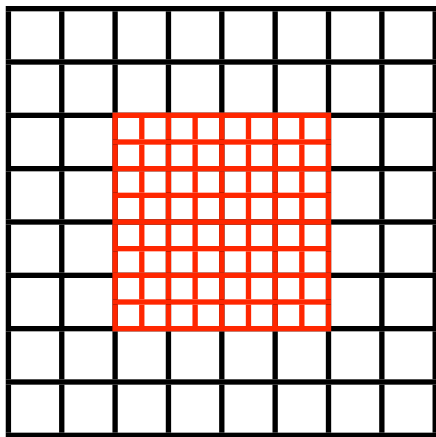
back to the
initial condition



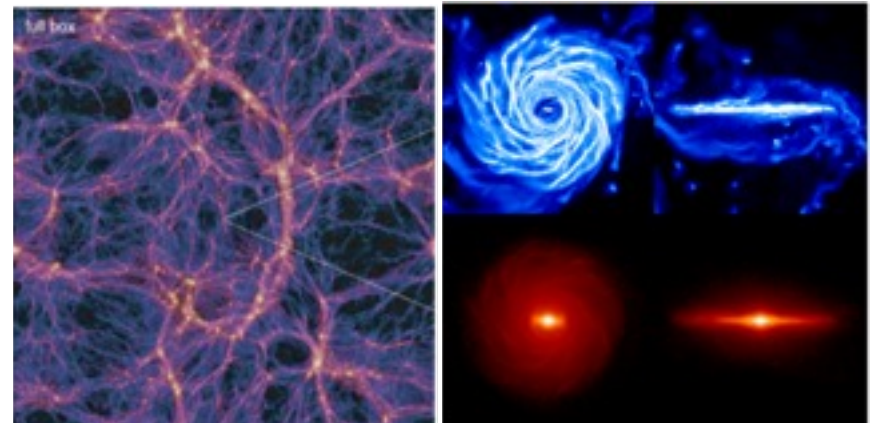
evolve (with gas)



add additional shorter
wave length modes to the
region of interest

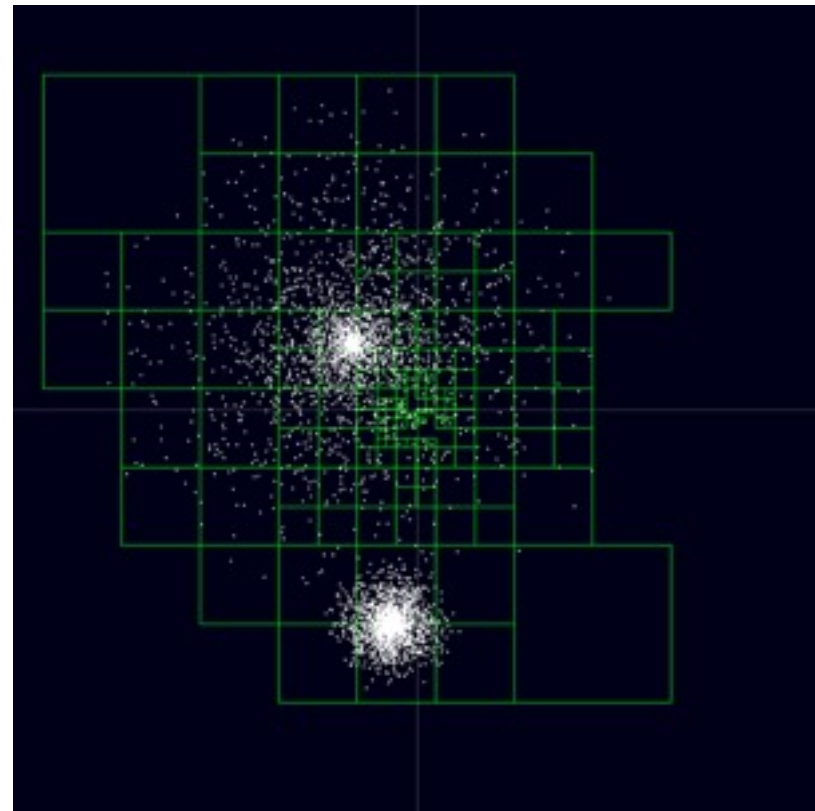
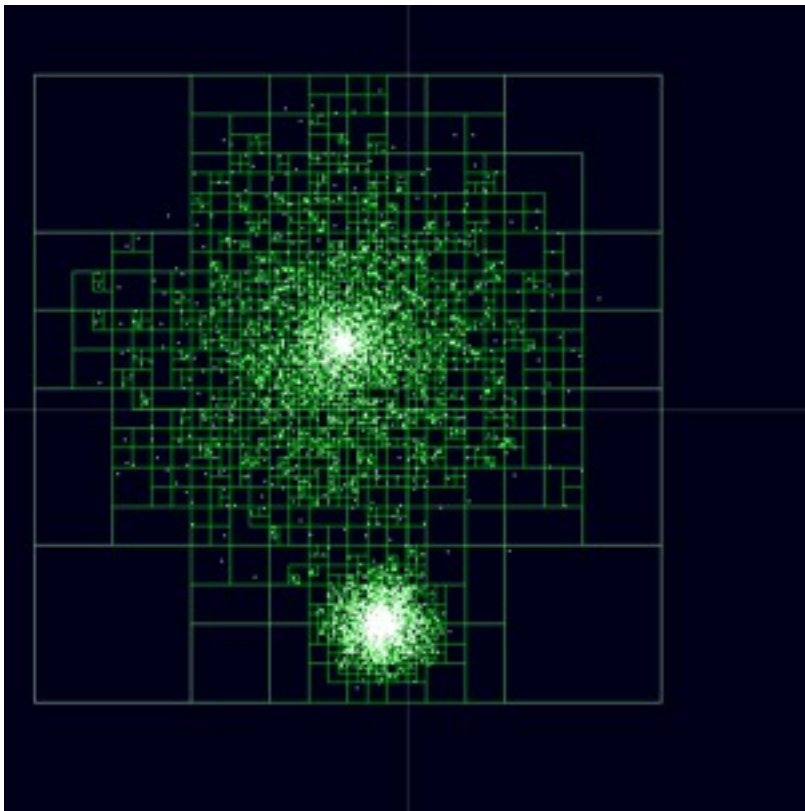
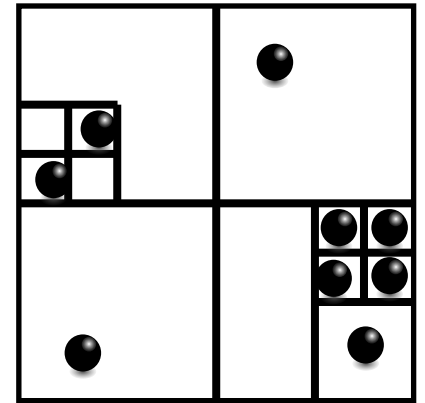


find a halo of interest



Tree 法

- 各ノードに含まれる粒子が1個になるまで, 計算領域を再帰的に8等分していく
- 十分遠方 ($L/r < \theta_{\text{crit}}$) のノードは1つの粒子だと思って計算する



流体法

- Smoothed particle hydrodynamic (SPH)
 - 粒子法: 流体を粒子の重ねあわせで表現
 - Lagrange 的方法
 - 粒子と共に動く座標系
 - 高密度領域で自動的に高分解能

長所と短所

● 長所

- 密度の高い所で自動的に解像度も高くなる
- ガリレイ不変
- 多次元の実装が簡単
- 安定

● 短所

- 密度の低い所の解像度が低い
- 低精度（空間0次精度）
- 不連続面が苦手
- 安定 (変なことをしていても止まらない)

基礎

- ある点での物理量 $f(\mathbf{x})$ の平均値を有限で球対称なカーネル $W(\mathbf{x}; h)$ を用いて次のように表す

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

$$\text{where } \int W(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \text{ and } W(\mathbf{x}) = W(-\mathbf{x})$$

- 微分は部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \langle \nabla f \rangle(\mathbf{x}) &= \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) \nabla_{\mathbf{x}'} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= - \int \{ \nabla_{\mathbf{x}'} W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \int \{ \nabla W(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \} f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \end{aligned}$$

精度

- $f(\mathbf{x}')$ を \mathbf{x} の周りで展開

$$f(\mathbf{x}') \simeq f(\mathbf{x}) + f^{(1)}(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \frac{f^{(2)}(\mathbf{x})}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 + \dots$$

- $\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \int W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'; h) f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$ に代入

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \frac{h_{\text{eff}}^2}{4} \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(h_{\text{eff}}^4)$$

$$\text{where } h_{\text{eff}}^2 \equiv 2 \int x^2 W(\mathbf{x}; h) d\mathbf{x}$$

- 空間2次精度

離散化

- 積分の離散化

- $d\mathbf{x}_i = \frac{m_i}{\rho_i}$ と体積要素を置き換え,

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) \simeq \sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) f_j \frac{m_j}{\rho_j}$$

- 一般には $\sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j} \neq 1$ なので

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) \simeq f(\mathbf{x}) \sum_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j; h) \frac{m_j}{\rho_j} + \dots$$

となり, **空間 0 次の項がすでに誤差を含む**

- $h \rightarrow 0$ で真の解に近づくためには全体の粒子数 N を大きくするよりもゆっくりとカーネル内の粒子数を大きくする必要がある

定式化 (1)

- 物理量 f として密度 ρ を考える

$$\rho_i \simeq \langle \rho \rangle(\mathbf{x}_i) \simeq \sum_j \rho_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r_{ij}; h) = \sum_j m_j W(r_{ij}; h)$$

- Lagrange 形式の流体の方程式

$$\dot{\rho} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P,$$

$$\dot{u} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v},$$

$$P = (\gamma - 1)\rho u$$

定式化 (2)

- 連続の式は不要

- 運動方程式は $\frac{\nabla P_i}{\rho_i} = \nabla \left(\frac{P_i}{\rho_i} \right) + \frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla \rho_i$ を用いて

- 第一項: $\nabla \left(\frac{P_i}{\rho_i} \right) = \sum_j \frac{P_j}{\rho_j} \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(r_{ij}, h)$

- 第二項: $\frac{P_i}{\rho_i^2} \nabla \rho_i = \frac{P_i}{\rho_i^2} \sum_j m_j \nabla W(r_{ij}, h)$

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\frac{\nabla P_i}{\rho_i} = -\sum_j m_j \left(\frac{P_j}{\rho_j^2} + \frac{P_i}{\rho_i^2} \right) \nabla W(r_{ij}, h)$$

- i と j に対して反対称であり, 作用反作用の原理を満たす

定式化 (3)

- エネルギー方程式

$$\begin{aligned}\rho_i \nabla_i \cdot \mathbf{v}_i &= \nabla_i \cdot (\rho_i \mathbf{v}_i) - \mathbf{v}_i \cdot \nabla_i \rho_i \\ &= \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\rho_j \mathbf{v}_j) \nabla_i W(r_{ij}, h) - \mathbf{v}_i \sum_j m_j \nabla_i W(r_{ij}, h) \\ &= \sum_j m_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla_i W(r_{ij}, h)\end{aligned}$$

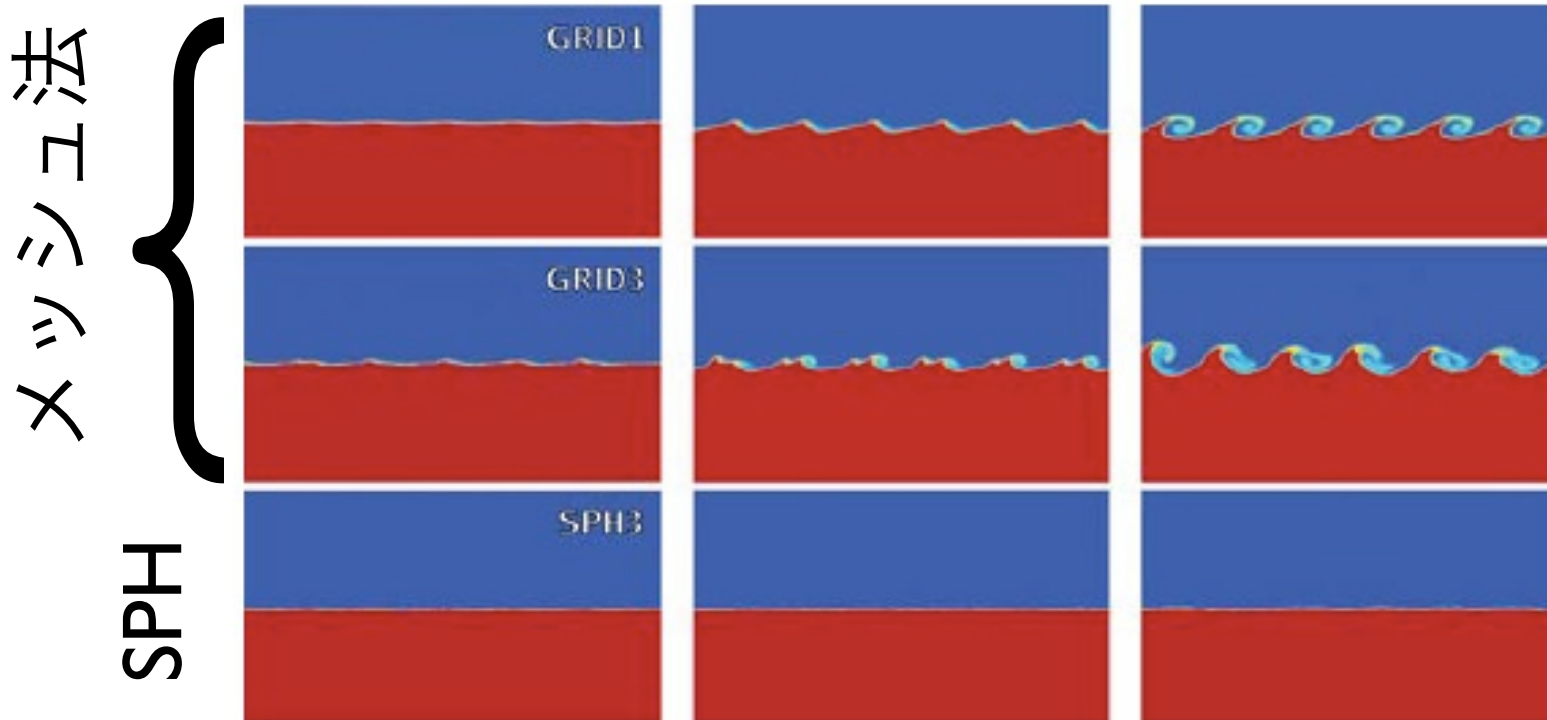
- 速度が $\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i$ の形で入るのでガリレイ不変となる

人工粘性

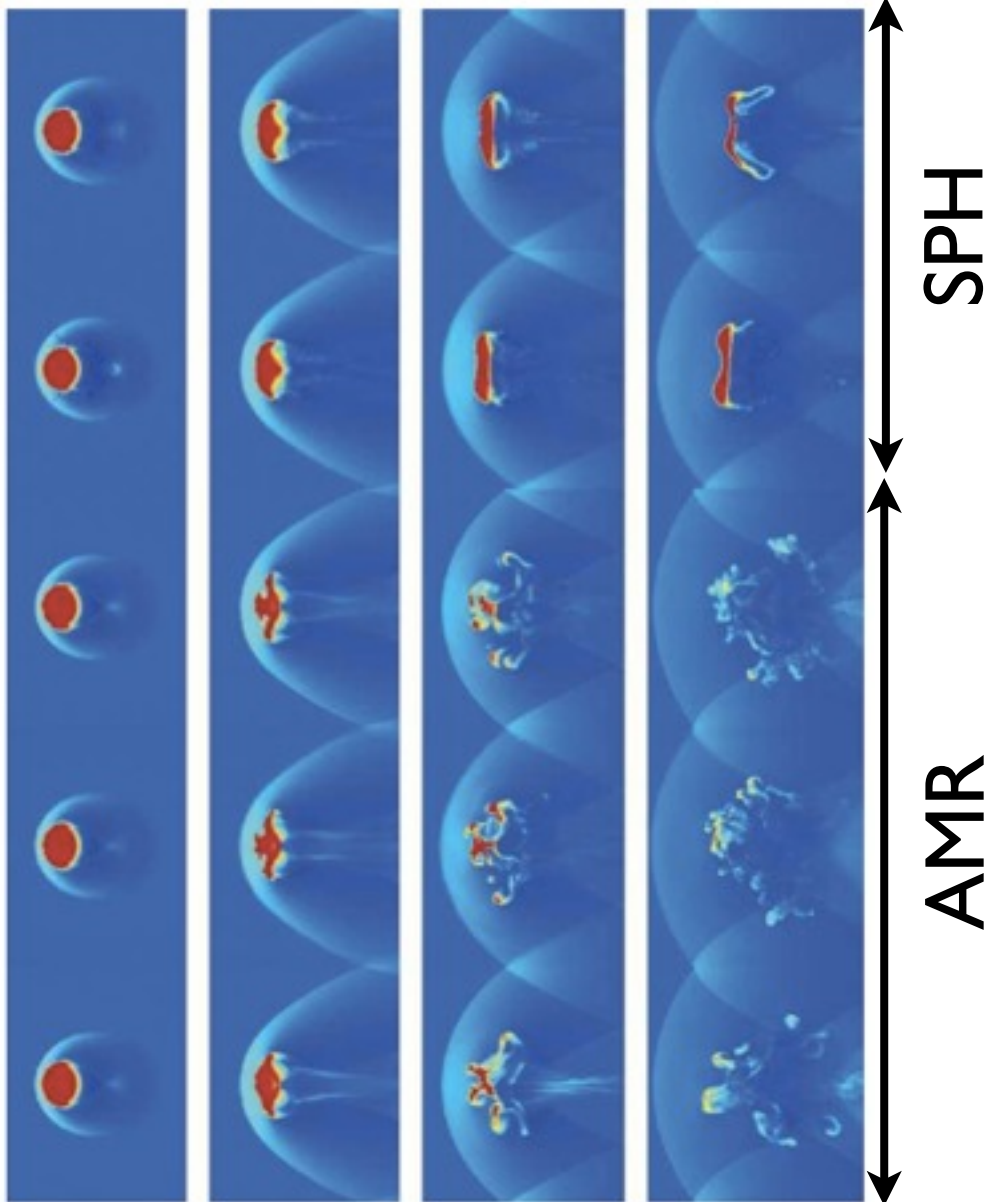
- 衝撃波を扱うために人工粘性が必要
 - $\nabla \cdot v < 0$ のところにだけ入れる
 - shear で粘性が働くのを防ぐため, 粘性項に $\frac{|\nabla \cdot v|}{|\nabla \cdot v| + |\nabla \times v|}$ のような factor をかけることが多い (Balsara'95)
- 何処にどれだけの粘性が必要かは計算をやってみるまでわからない

Kelvin-Helmholtz instability

- 普通の SPH では KHI が解けない (TO + '04, Agertz + '07)

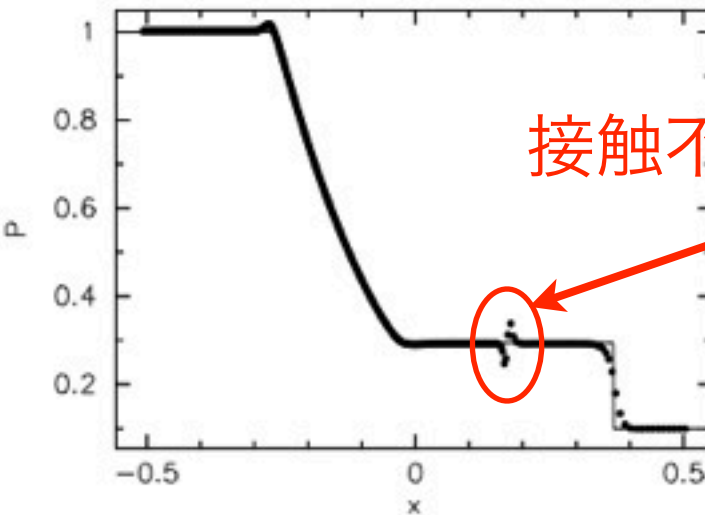
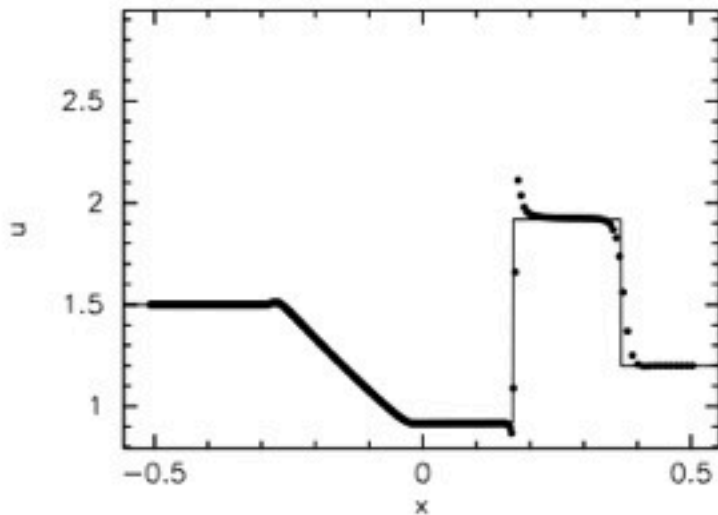
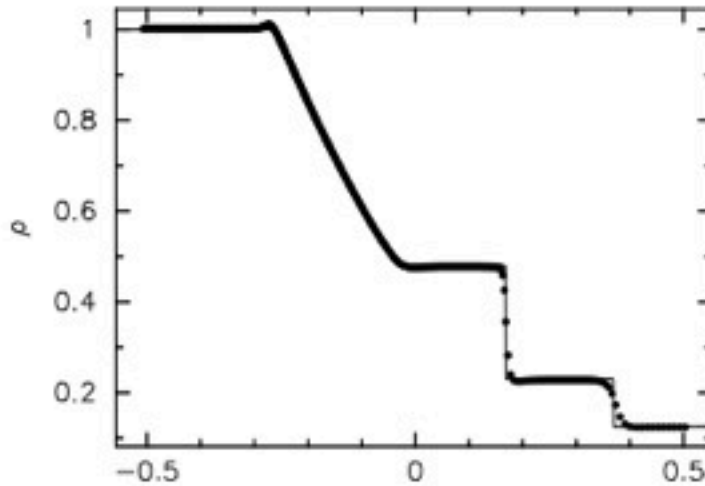
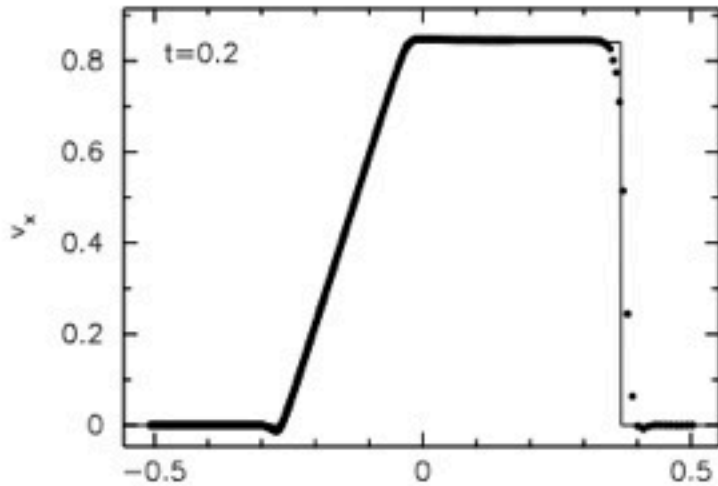


SPH v. s. AMR



- SPH は Kelvin-Helmholtz instability が正しく解けないため, gas stripping を過小評価する

原因



接触不連続面のコレ

一次元ショックチューブ

対処法

- 密度ではなく圧力を smoothing する
(Ritchie & Thomas'01, Saitoh & Makino'12)

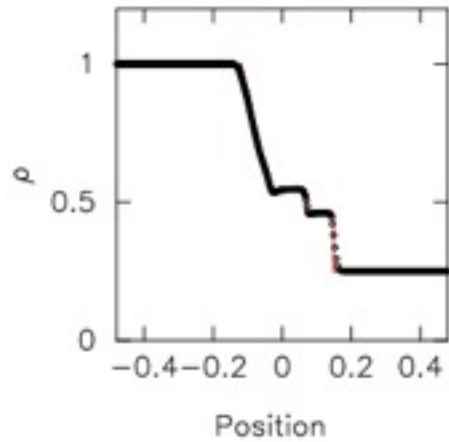
$$P = (\gamma - 1)u\rho \Rightarrow d\mathbf{x}_i = \frac{m_i}{\rho_i} = \frac{m_i u_i (\gamma - 1)}{P_i}$$

$$(\rho u)_i \simeq \sum m_j u_j W(r_{ij}; h_i)$$

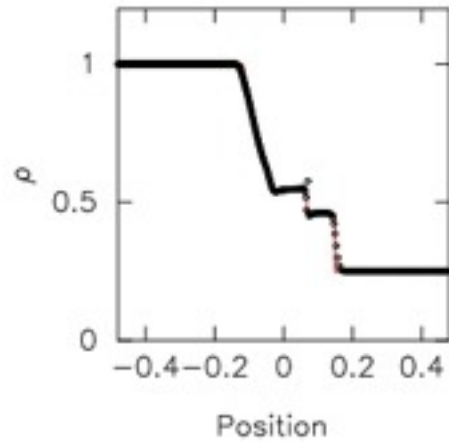
- 接触不連続面に人工熱伝導. 圧力のジャンプを均す (Price'08)
- 運動方程式をいじる

結果

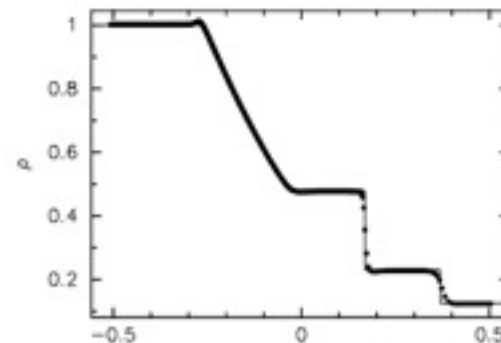
普通のSPH



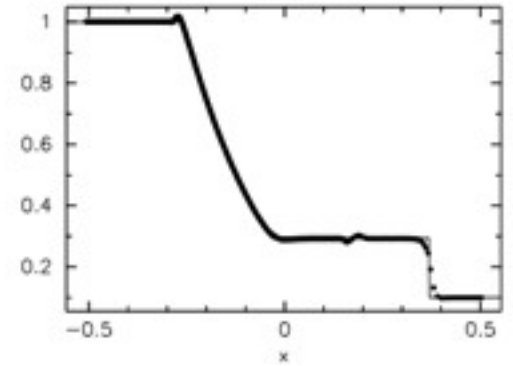
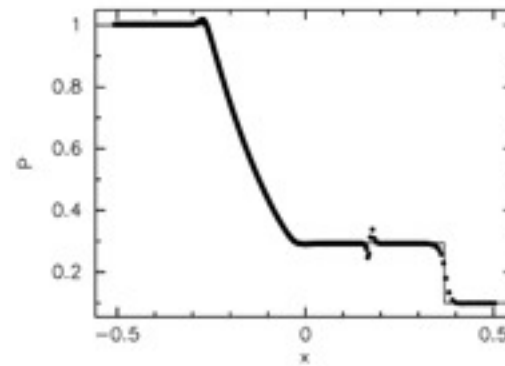
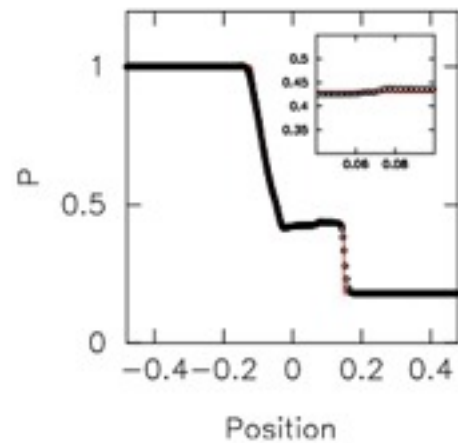
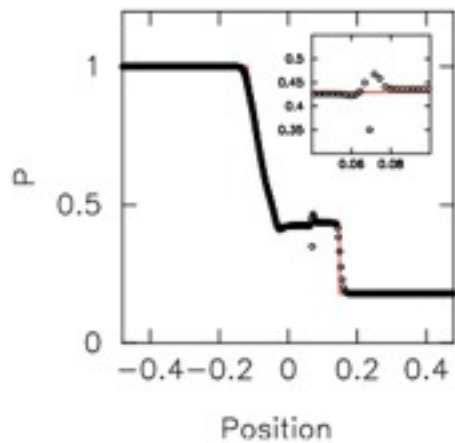
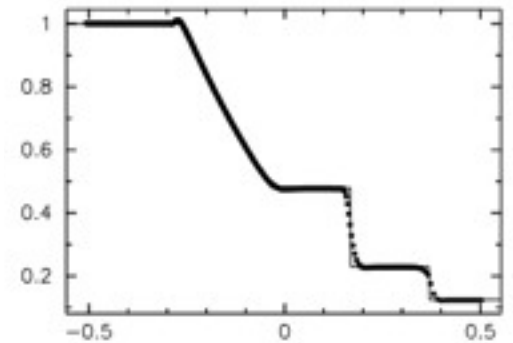
smoothed P



普通のSPH



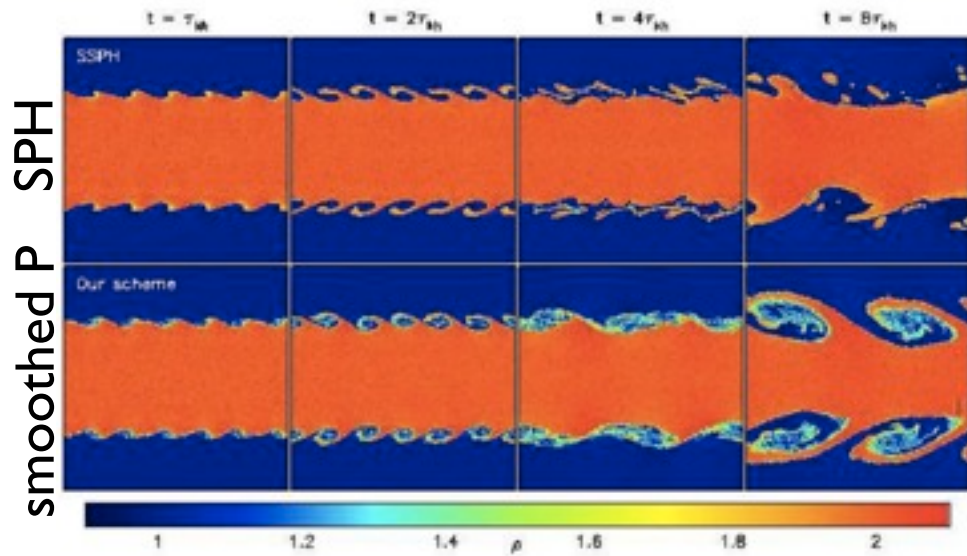
人工熱伝導入り



Price'08

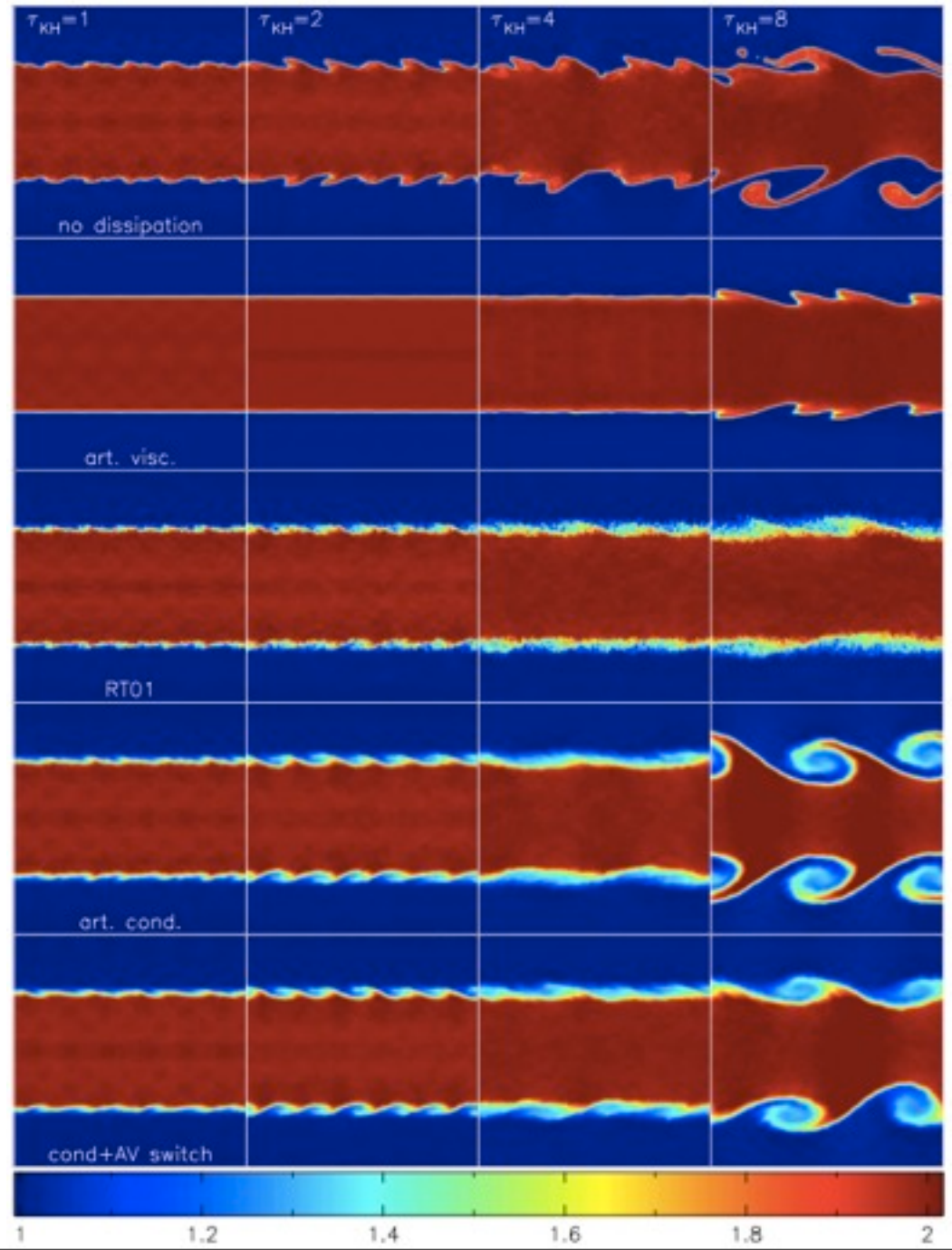
Saitoh & Makino'12

KHI

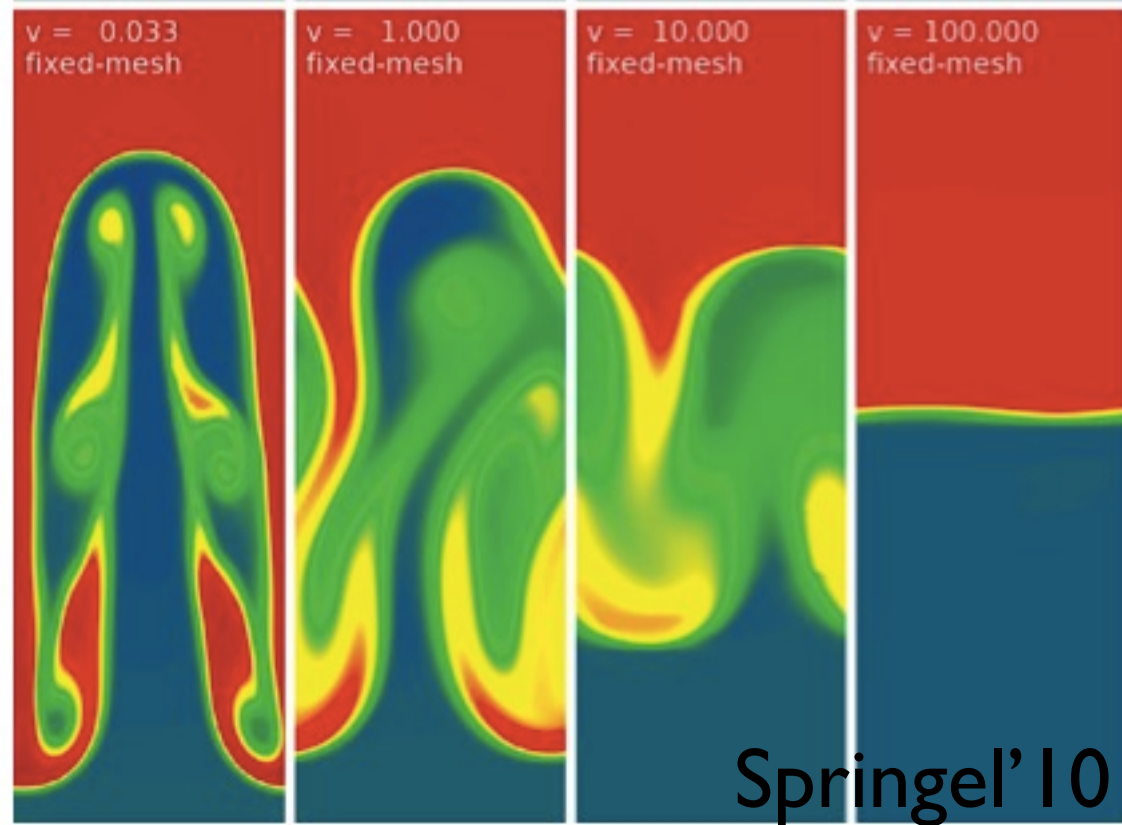


Saitoh & Makino '12

Price '08



AMR?

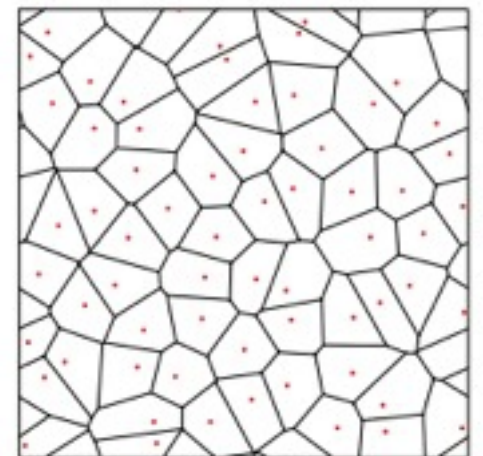


同じ問題を平行移動の速さを変えて解いたもの。

Eulerian code がガリレイ不変でないことによる問題。

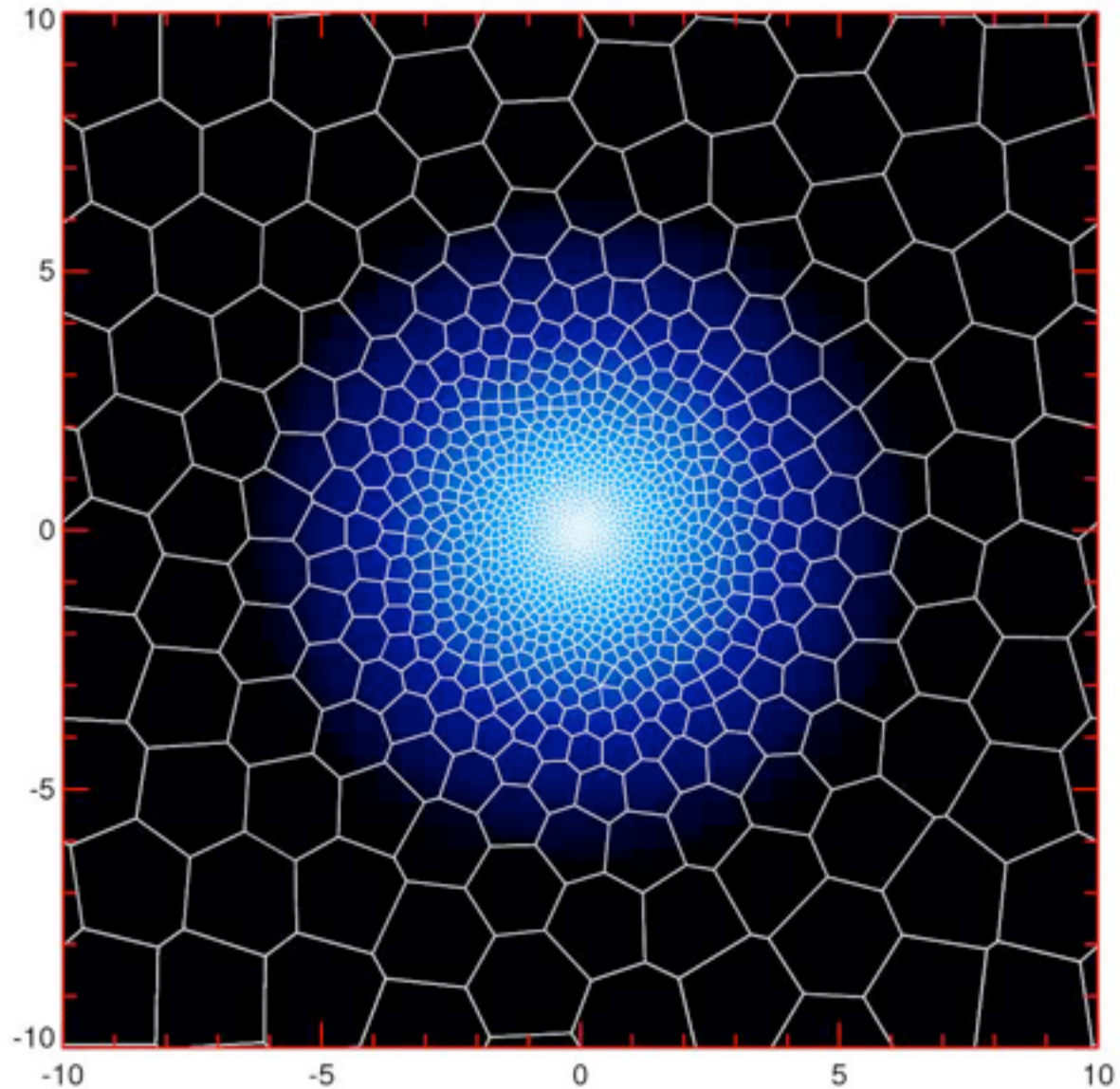
Moving mesh

- 普通にやると shear flow や渦が存在すると破綻
- local な流体の速度で動く mesh generation point を使った Voronoi mesh (Springel'10)
- 有限体積法を使った Riemann solver
- ガリレイ不変

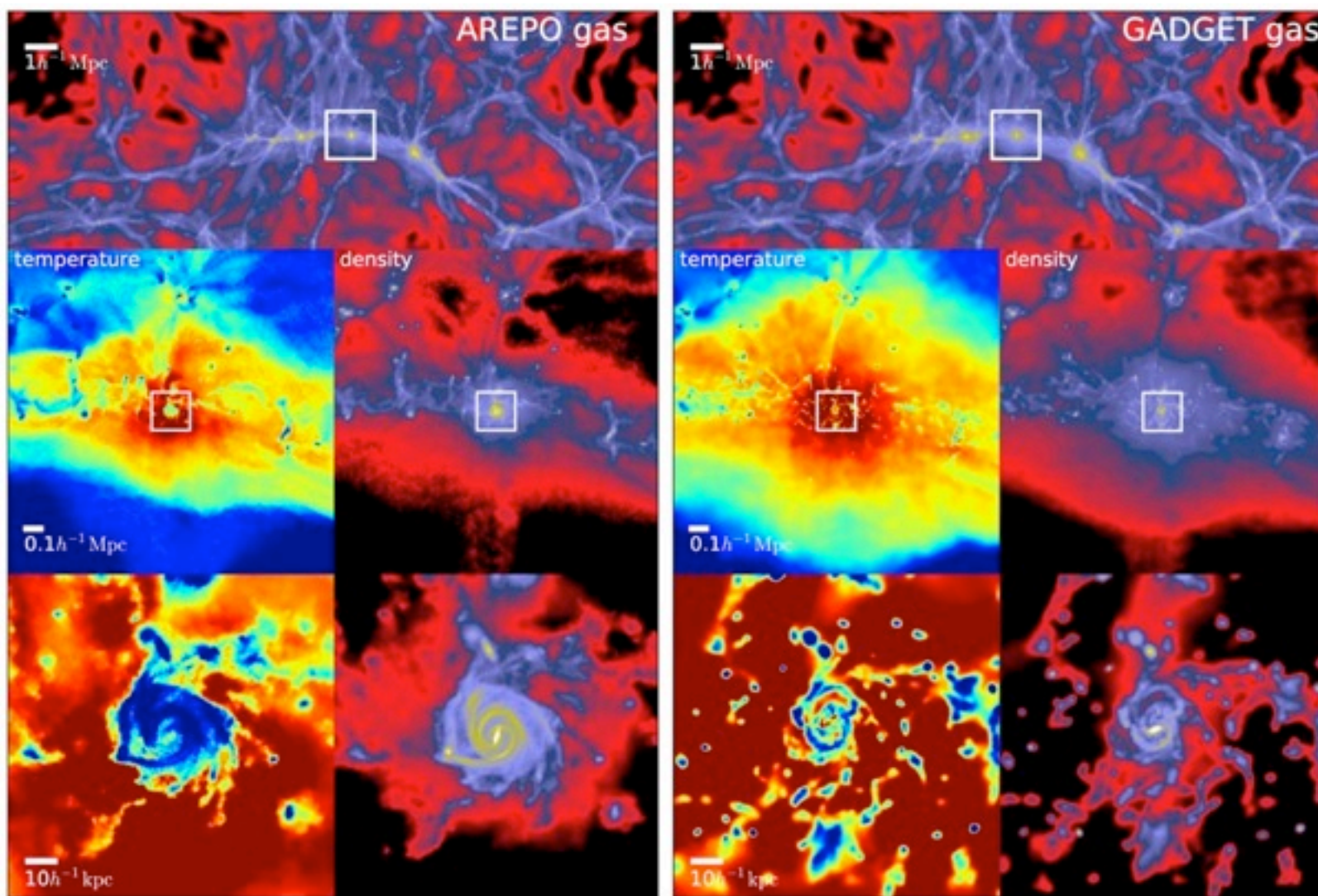


Moving Mesh 法

Moving Mesh 法



SPH と moving mesh の比較

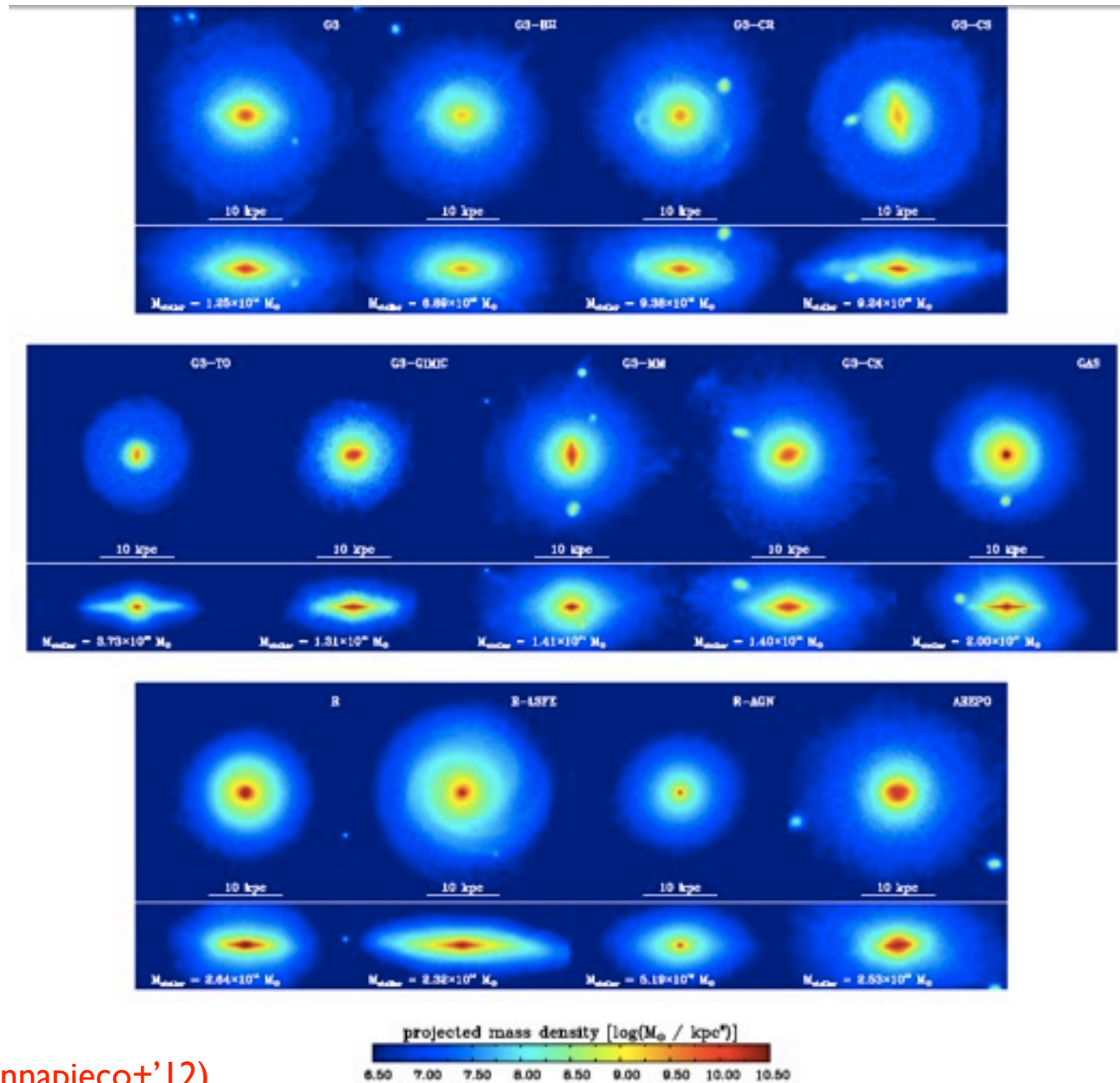


流体法まとめ

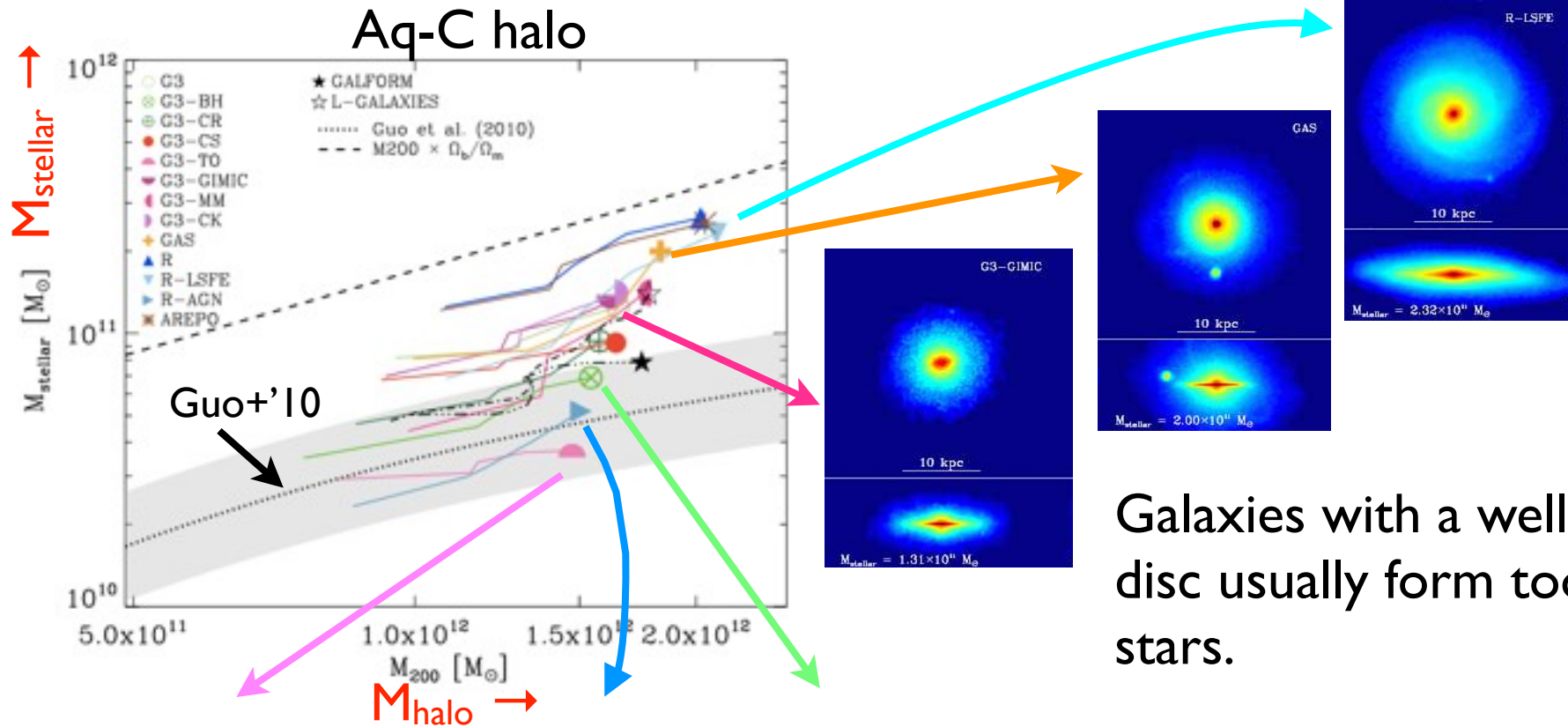
- 流体法は色々
 - SPH: 便利で一番広く使われているが問題もいろいろ. 最近様々な改善法が提案されている (ただし, 空間精度は低い)
 - AMR: compact weighting scheme 等との組み合わせは面白いかも
 - Moving mesh: いいところどり.

code comparison

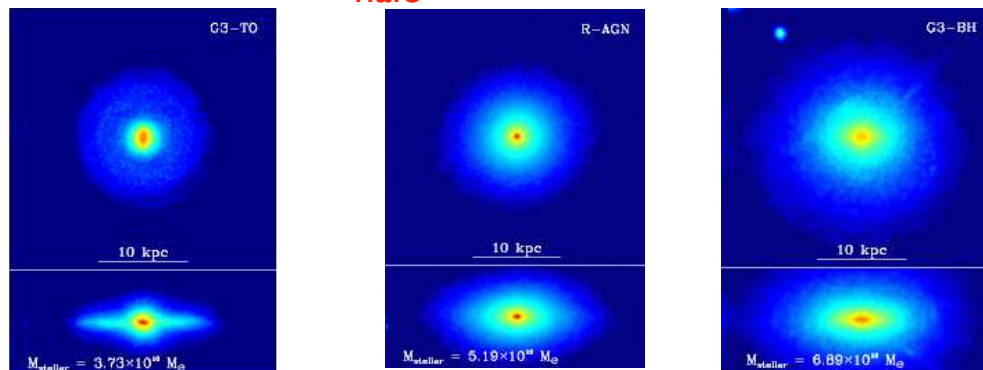
- 同じ初期条件でそれぞれ勝手にシミュレーション
- $M_{\text{vir}} \sim 10^{12} M_{\odot}$
- 大惨事



Stellar mass and morphology



Galaxies with a well-defined disc usually form too many stars.



- Need strong feedback to match the stellar mass.
- Strong feedback often prevents disc formation

The Aquila comparison project (Scannapieco+'12)

まとめ

- 現状, スキームの違いよりも subgrid physics の実装の違いの方が大きい
- とは言え subgrid physics に制限をつけるという意味でもより良いスキームを使うべき