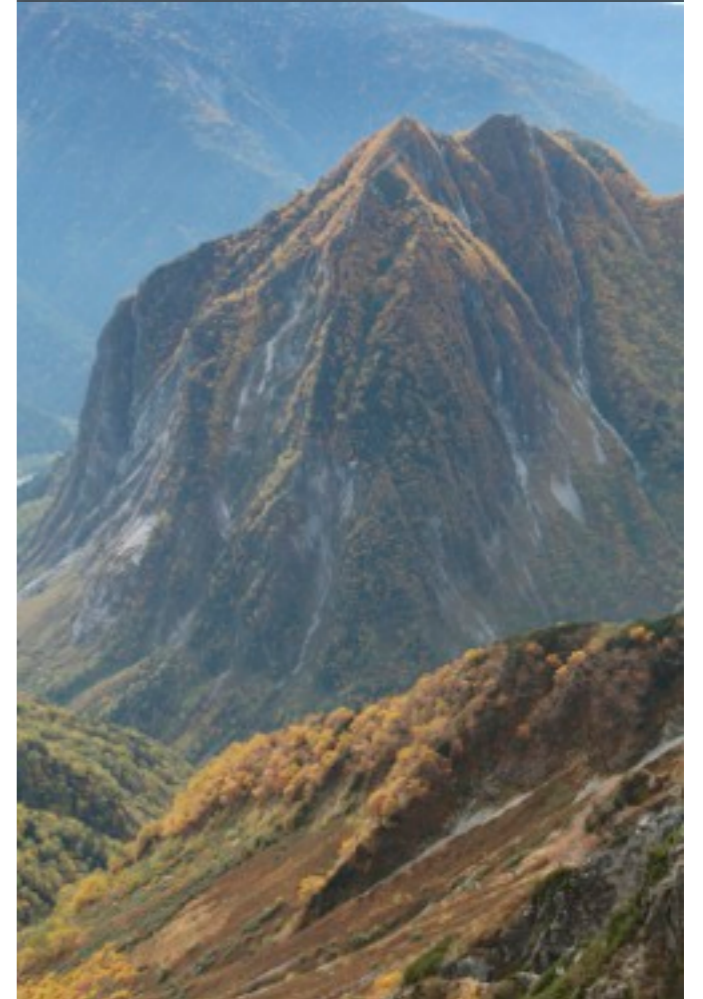
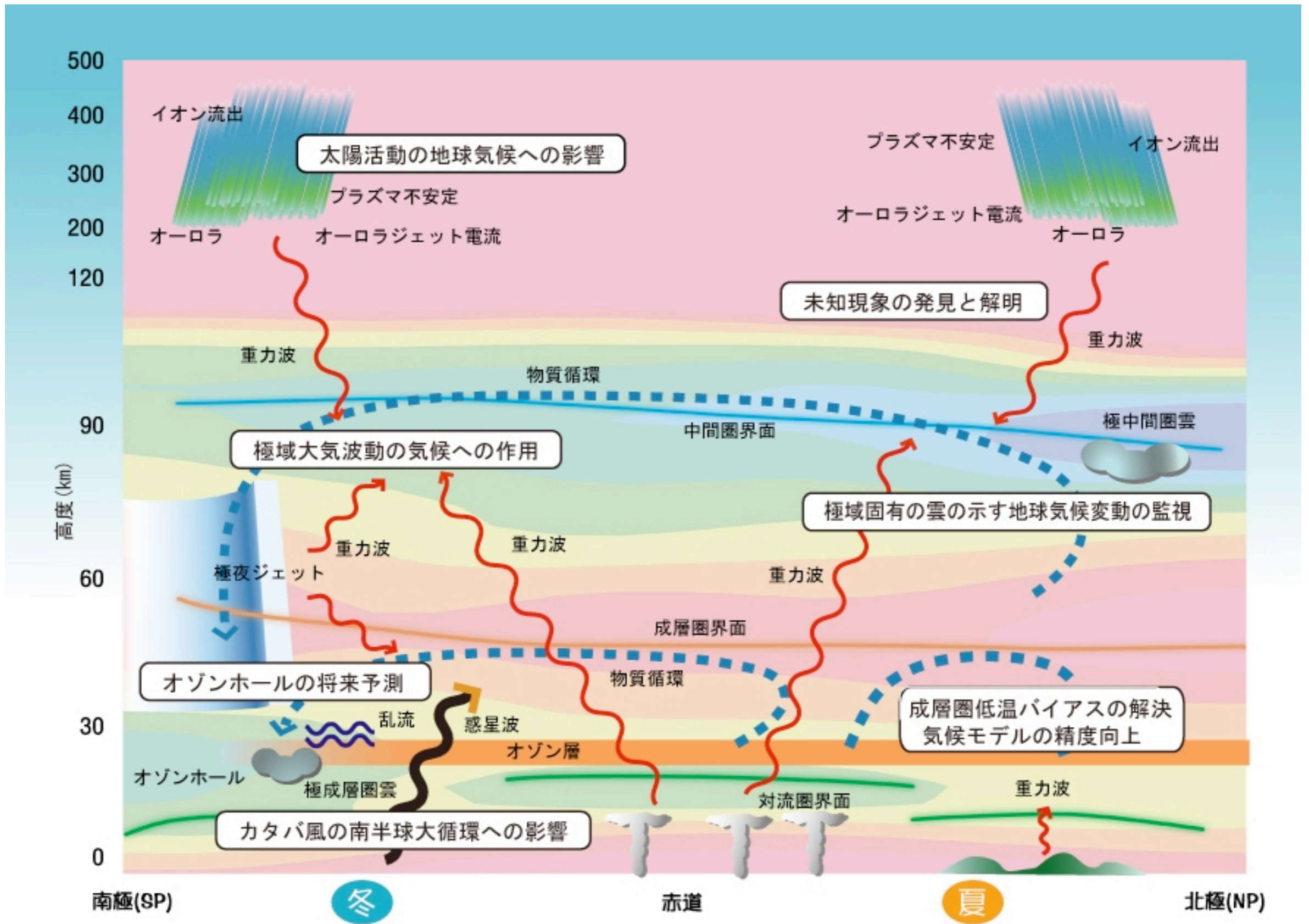


変形オイラー平均理論の拡張による 有限振幅ロスビー波と流れの相互作用の記述

中村 昇

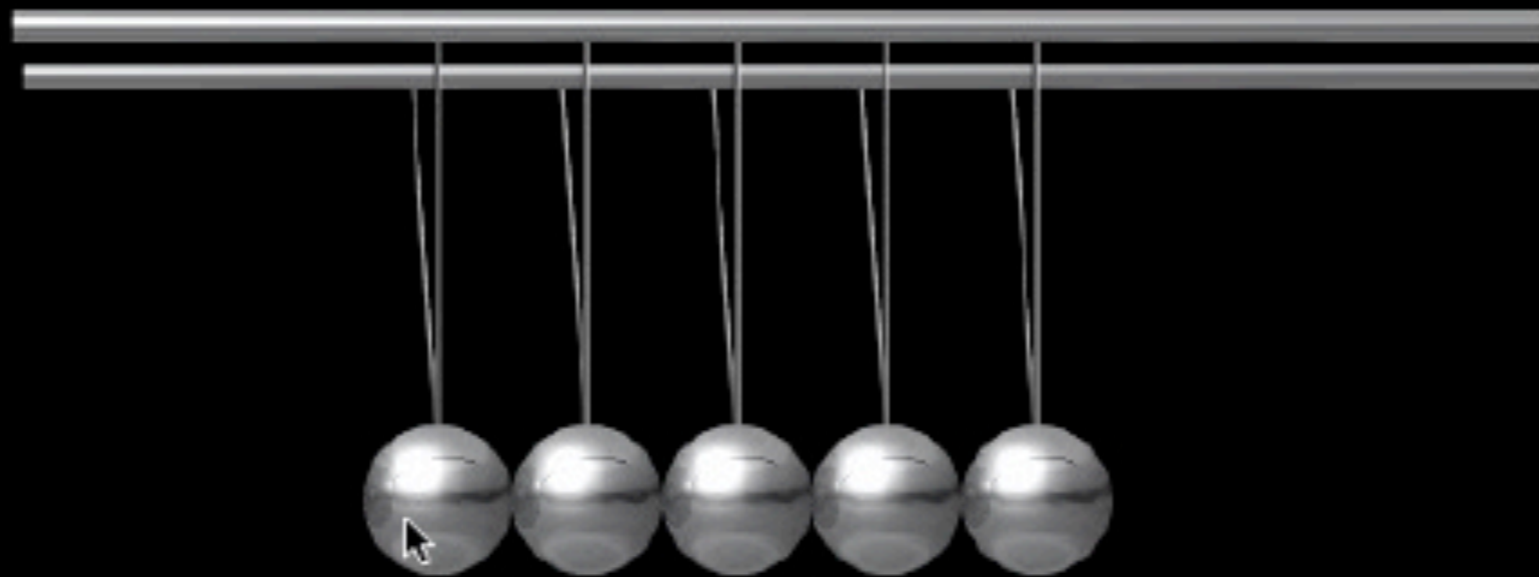
w/ Da Zhu, Ari Solomon, Clare Huang
University of Chicago





PANSY home

画像をクリックすると動画にリンクします



流れと擾乱の「運動量密度」

$$\frac{dU}{dt} = +\nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\frac{dA}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(U + A) = 0$$

オイラー（経度）平均

- Ferrel (1861)
- Eliassen (1952)
- Kuo (1956)

変形オイラー平均

ラグランジュ・等温位面平均

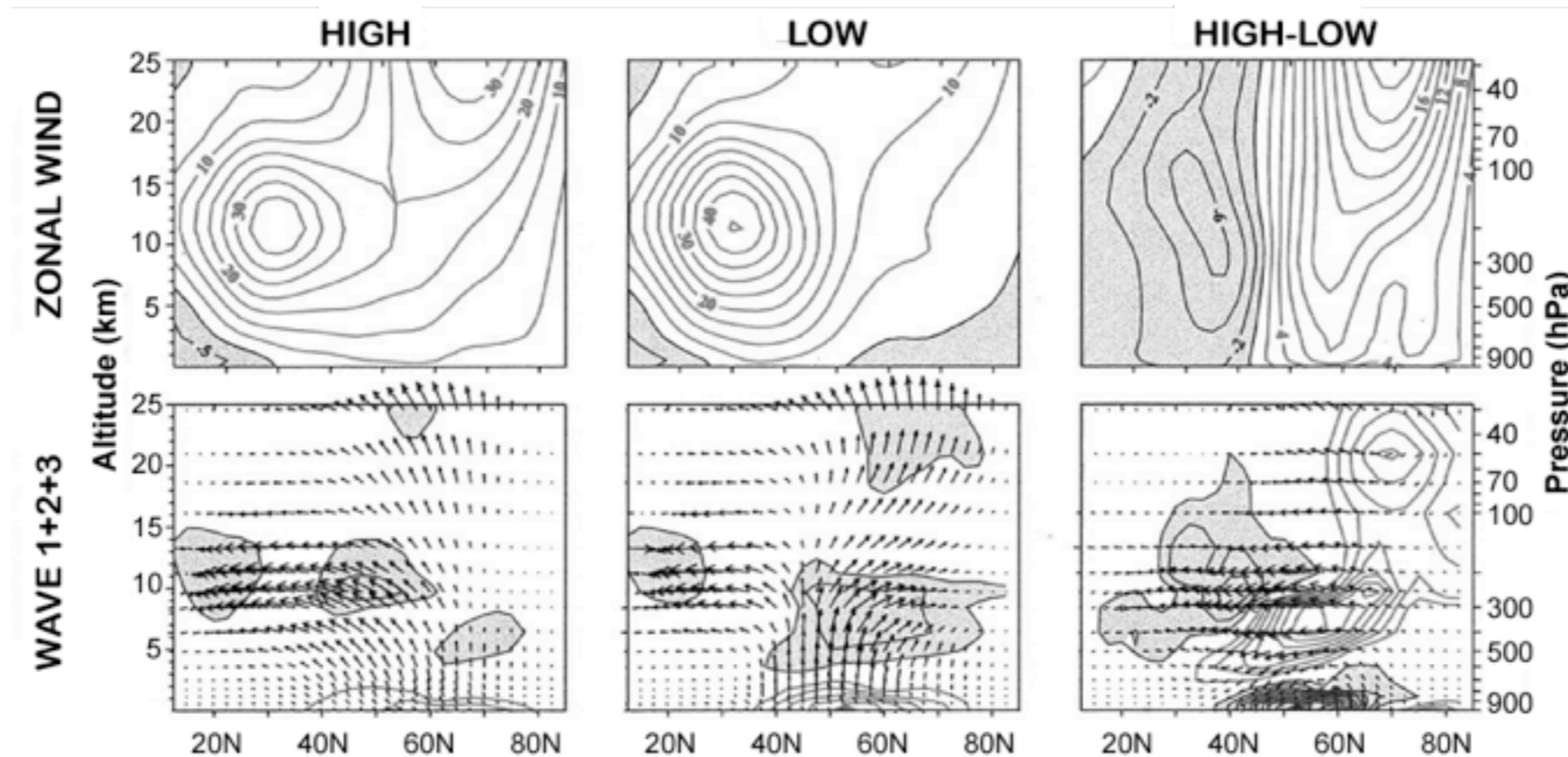
- Stokes (1847)
- Eliassen & Palm (1960)
- Charney & Drazin (1961)
- Booker & Bretherton (1967)
- Lindzen & Holton (1968)
- Dickinson (1969)
- Matsuno (1970)
- Andrews & McIntyre (1976, 1978)
- Dunkerton (1978)
- Uryu (1979)
- Andrews (1983)
- Tung (1986)
- Johnson (1989)

理論の形式化は必ずしも診断を単純化しない

現行の変形オイラー平均 (TEM) /

E-P フラックス診断でわかること

- 擾乱がどの方向にどのくらい角運動量を運んでいるか
- 擾乱がどこでどのくらい流れを加速・減速しているか



Hartmann et al 2000

現行の変形オイラー平均 (TEM) / E-P フラックス診断で**わからない**こと

- 観測された平均流は、すでに擾乱によってどのくらい加速・減速されているのか (累積効果)
- 擾乱による加速・減速のうち、どのくらいが非保存力 (混合など) によるのか (波 vs 乱流)

経度平均帯状流

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + n.c.$$

厳密

擬運動量密度 (一般化されたEliassen-Palm定理)

$$\frac{\partial A_L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + O(\alpha^3) + n.c.$$

$O(\alpha^2)$

$$A_L = \frac{\overline{\zeta'^2}}{2\gamma}, \quad \gamma = \beta - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

非加速定理 (Charney-Drazin)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + A_L) = O(\alpha^3) + n.c.$$

$O(\alpha^2)$

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

新しい診断系の特徴

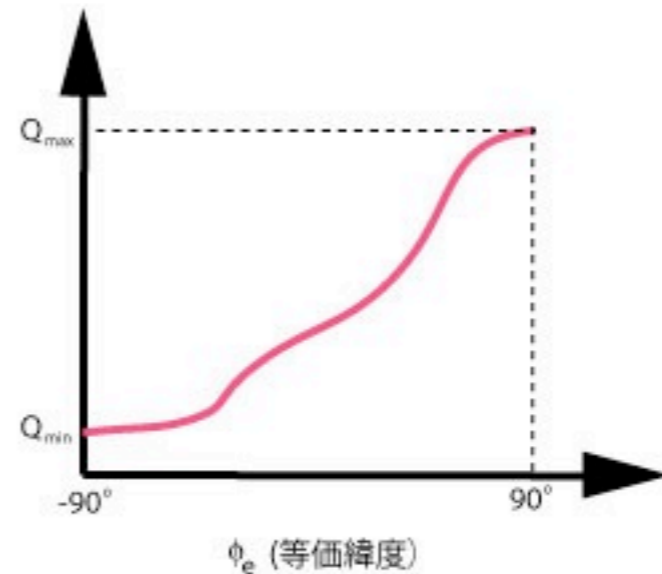
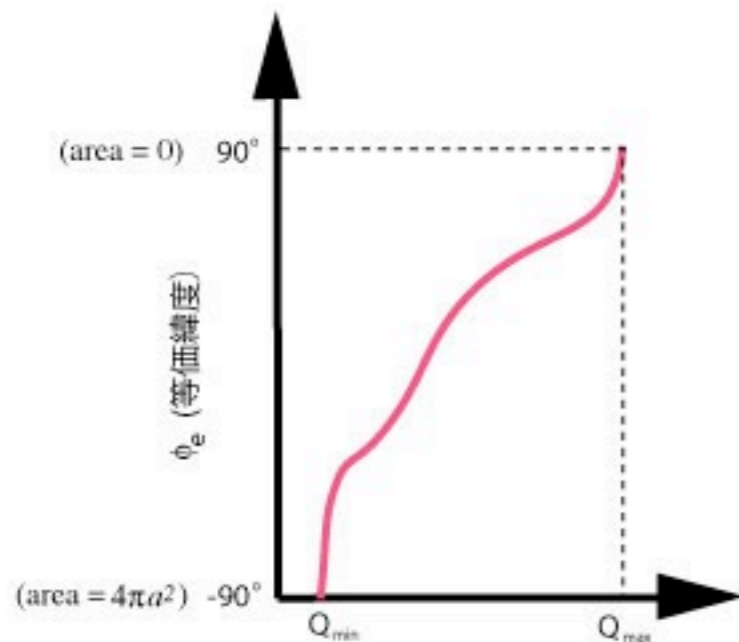
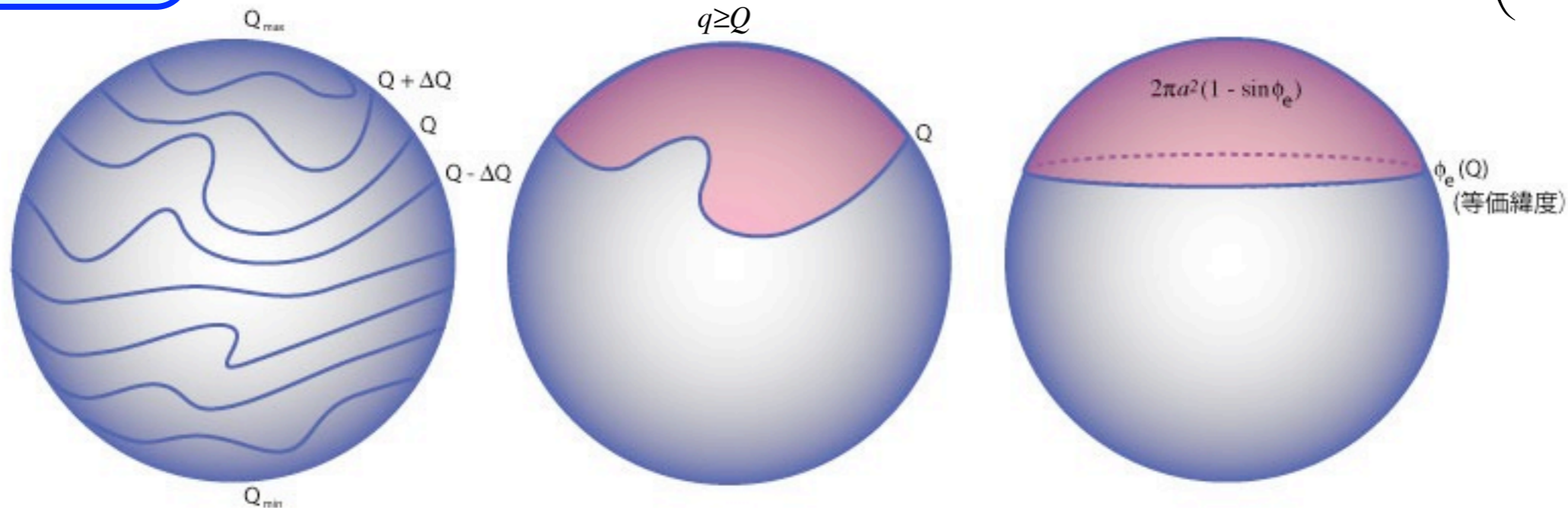
- オイラー（経度）平均とラグランジュ（ポテンシャル渦度コンター）平均のハイブリッド
- 擾乱をポテンシャル渦度コンターの変位で定量化
- 有限振幅ロスビー波とバランス渦に関する、厳密な非加速定理
- 混合効果の見積もり
- ゆっくり変動する基本場の定義

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

● ラグランジュ（絶対渦度コンター）平均

等価緯度

$$q = f + \zeta, \quad A(Q, t) = \iint_{q \geq Q} 2\pi a^2 \cos \phi d\lambda d\phi \Rightarrow \phi_e(Q) = \sin^{-1} \left(1 - \frac{A(Q)}{2\pi a^2} \right)$$

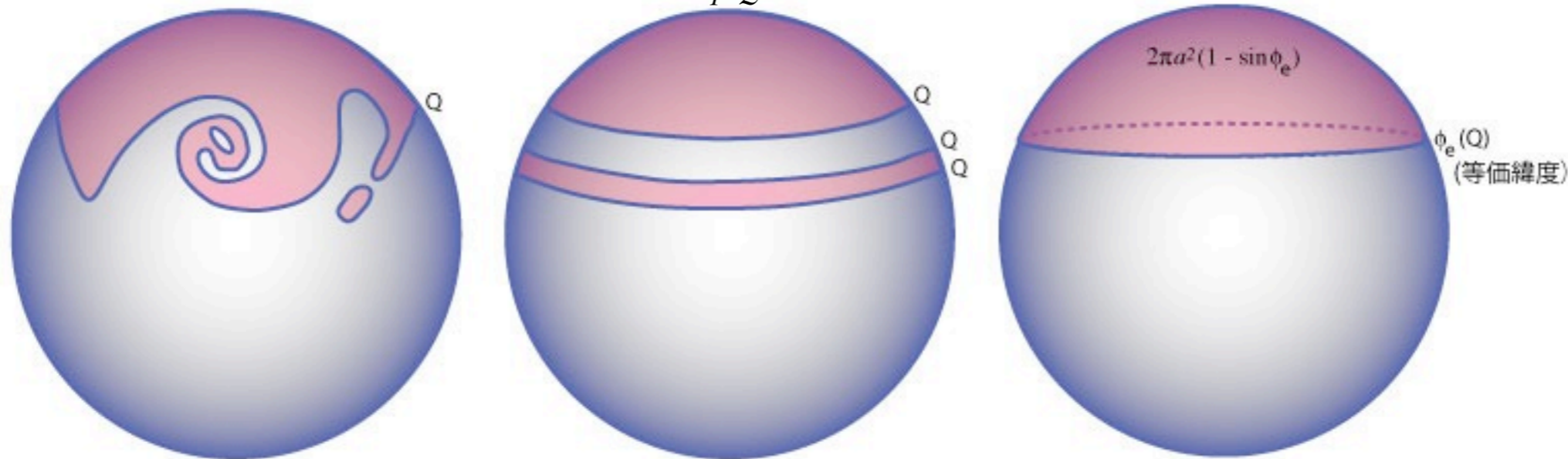


厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

● ラグランジュ（絶対渦度コンター）平均

等価緯度

$$q = f + \zeta, \quad A(Q, t) = \iint_{q \geq Q} 2\pi a^2 \cos \phi d\lambda d\phi \Rightarrow \phi_e(Q) = \sin^{-1} \left(1 - \frac{A(Q)}{2\pi a^2} \right)$$



- コンターの形状に依存せず、 $\partial Q / \partial \phi_e$ はつねに正
- 非発散の2次元移流過程では $Q(\phi_e)$ は不変
- オイラー経度平均に比べ、絶対渦度勾配の非均一性を維持

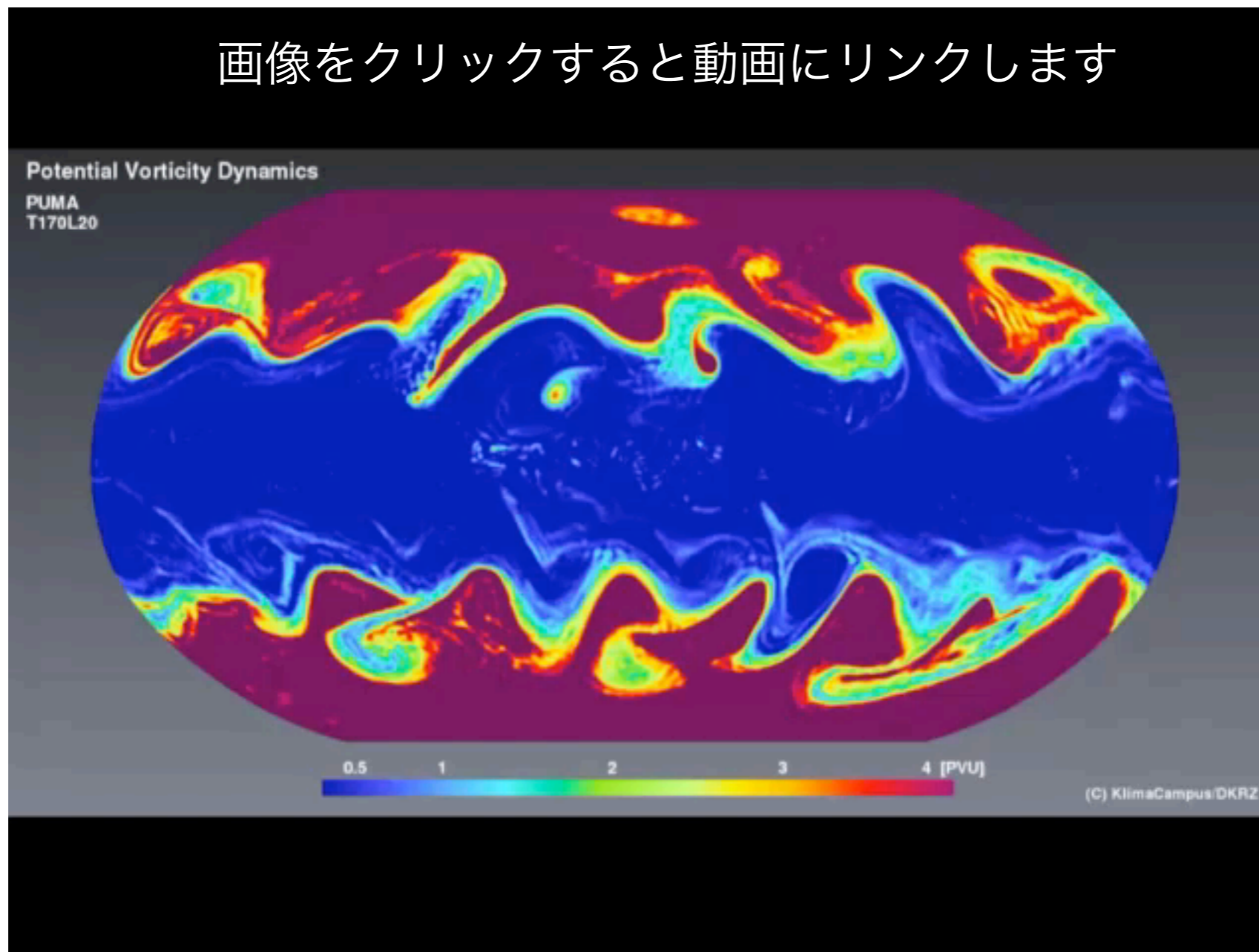
厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- ラグランジュ（絶対渦度コンター）平均

等価緯度

$$q = f + \zeta, \quad A(Q, t) = \iint_{q \geq Q} 2\pi a^2 \cos \phi d\lambda d\phi \Rightarrow \phi_e(Q) = \sin^{-1} \left(1 - \frac{A(Q)}{2\pi a^2} \right)$$

画像をクリックすると動画にリンクします



厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- ラグランジュ（絶対渦度コンター）平均

等価緯度

$$q = f + \zeta, \quad A(Q, t) = \iint_{q \geq Q} 2\pi a^2 \cos \phi d\lambda d\phi \quad \Rightarrow \quad \phi_e(Q) = \sin^{-1} \left(1 - \frac{A(Q)}{2\pi a^2} \right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi, q) = -\nabla \cdot \mathbf{F}_d$$

$$\frac{\partial Q(\phi_e, t)}{\partial t} = \frac{1}{a^2 \cos \phi_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} \left(K_{eff} \cos \phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e} \right)$$

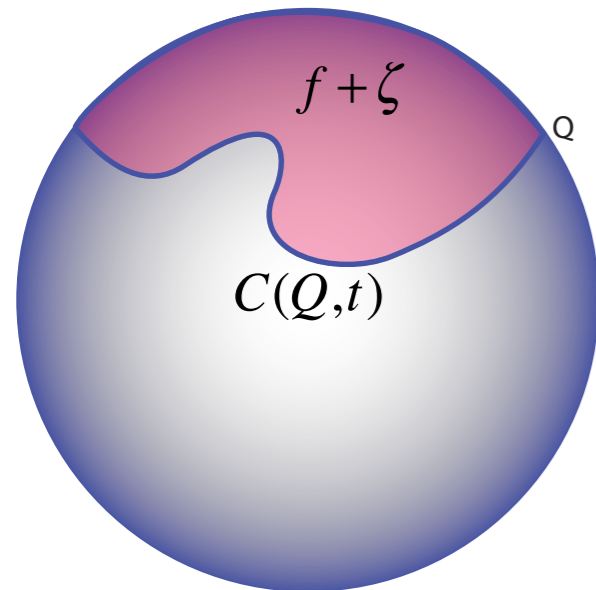
$$K_{eff}(\phi_e, t) \equiv \frac{-a^2 \langle \mathbf{F}_d \cdot \nabla q \rangle_{Q(\phi_e)}}{(\partial Q / \partial \phi_e)^2} \quad : \quad \text{有効拡散係数}$$

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

● ラグランジュ（絶対渦度コンター）平均

ケルビン循環

$$q = f + \zeta, \quad C(Q, t) = \iint_{q \geq Q} 2\pi a^2 q \cos\phi d\lambda d\phi \Rightarrow C(\phi_e, t)$$



$$\frac{\partial Q(\phi_e, t)}{\partial t} = \frac{1}{a^2 \cos\phi_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} \left(K_{eff} \cos\phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e} \right)$$

$$\frac{\partial C(\phi_e, t)}{\partial t} = -2\pi K_{eff} \cos\phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e}$$

右辺：コンターまわりの渦度の
拡散フラックス

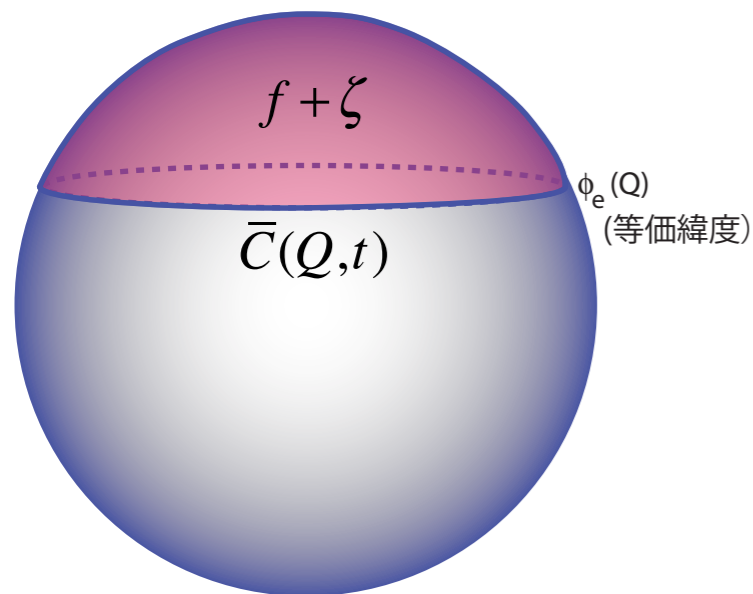
拡散がなければ、循環は保存

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

● オイラー（緯度）平均

ケルビン循環

$$q = f + \zeta, \quad \bar{C}(\phi_e, t) = \iint_{\phi \geq \phi_e} 2\pi a^2 q \cos \phi d\lambda d\phi = 2\pi a \cos \phi_e (\bar{u} + \Omega a \cos \phi_e)$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{C}(\phi_e, t)}{\partial t} &= 2\pi a \cos \phi_e \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\ &= 2\pi a \cos \phi_e \overline{v' \zeta'} + diff \\ &= -\frac{2\pi}{\cos \phi_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} \left(\overline{u' v'} \cos^2 \phi_e \right) + diff \end{aligned}$$

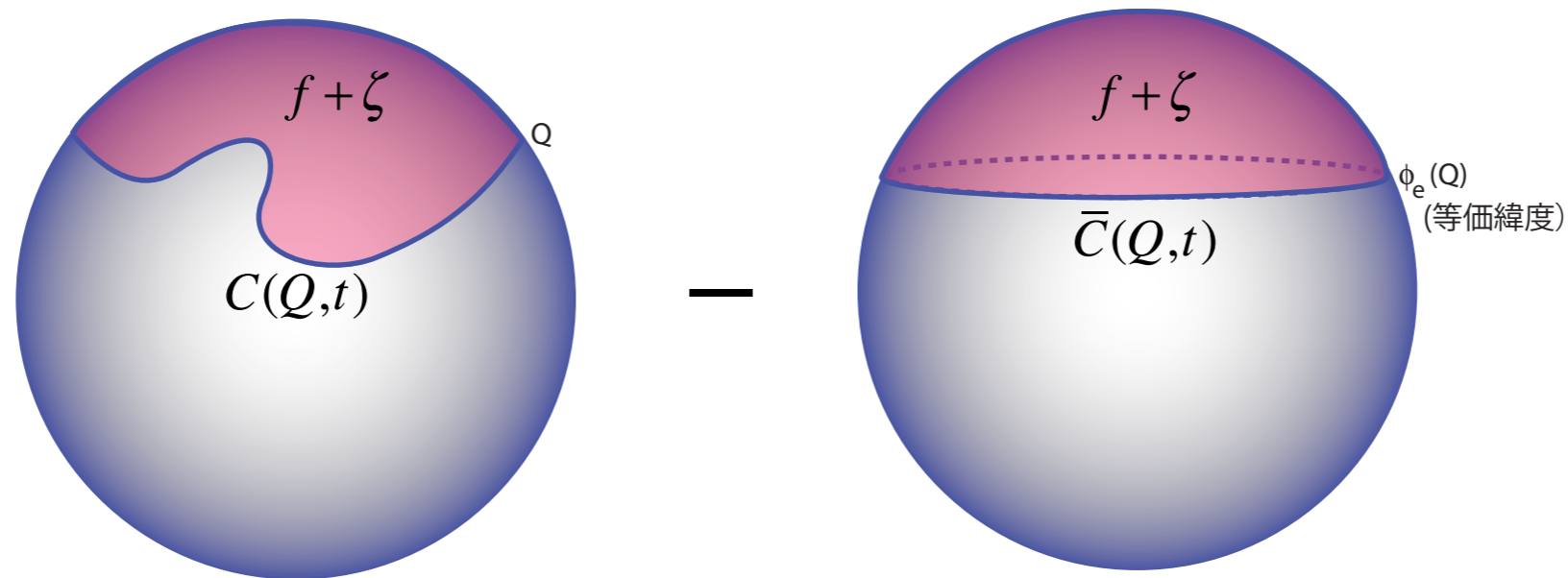
右辺：等価緯度における渦度の移流フラックス
(EPフラックス発散) + 微小拡散

EPフラックスが循環を駆動

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- ハイブリッド擬角運動量密度 (波の活動度)

$$A(\phi_e, t) a \cos \phi_e \equiv \frac{1}{2\pi} (C(Q(\phi_e, t)) - \bar{C}(\phi_e, t))$$



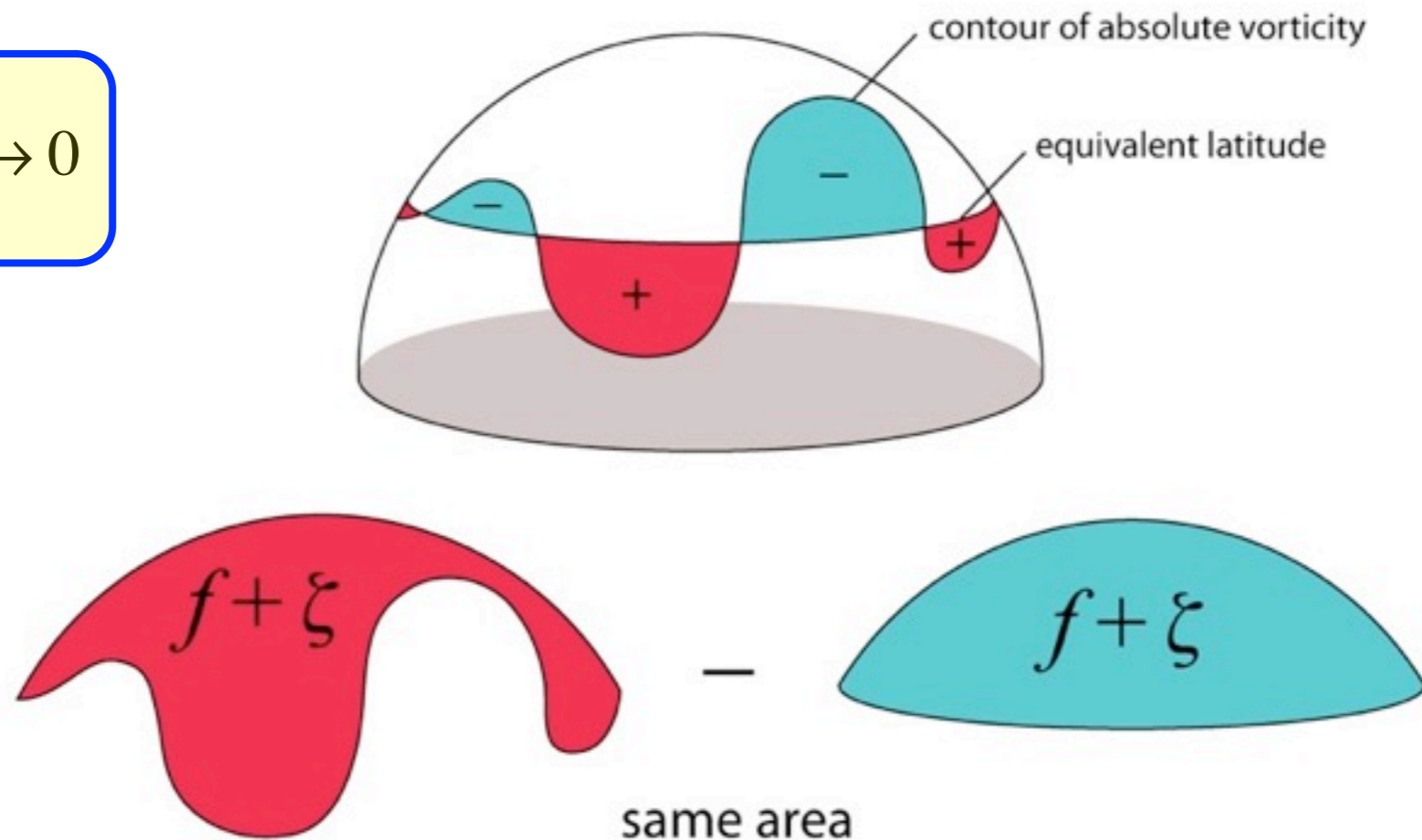
厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- ハイブリッド擬角運動量密度（波の活動度）

$$A(\phi_e, t) a \cos \phi_e = \frac{1}{2\pi} \left(\iint_{f+\zeta \geq Q} (f+\zeta) dS - \iint_{\phi \geq \phi_e} (f+\zeta) dS \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\iint_{(f+\zeta \geq Q) \cap (\phi < \phi_e)} (f+\zeta) dS - \iint_{(f+\zeta < Q) \cap (\phi \geq \phi_e)} (f+\zeta) dS \right) \geq 0$$

$$A \rightarrow A_L \quad \text{as} \quad \alpha \rightarrow 0$$



厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- 有限振幅Eliassen-Palm定理

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(\phi_e, t) a \cos \phi_e] = \frac{1}{\cos \phi_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} (\overline{u'v'} \cos^2 \phi_e) - K_{eff} \cos \phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e} - diff$$

- 有限振幅非加速定理

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\bar{u} + A(\phi_e, t)) a \cos \phi_e] = -K_{eff} \cos \phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e}$$

混合がなければ右辺は消える

厳密な非加速定理の導出とTEMの拡張

- 有限振幅Eliassen-Palm定理

$$\frac{\partial}{\partial t} [A(\phi_e, t) a \cos \phi_e] = \frac{1}{\cos \phi_e} \frac{\partial}{\partial \phi_e} (\overline{u'v'} \cos^2 \phi_e) - K_{eff} \cos \phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e} - diff$$

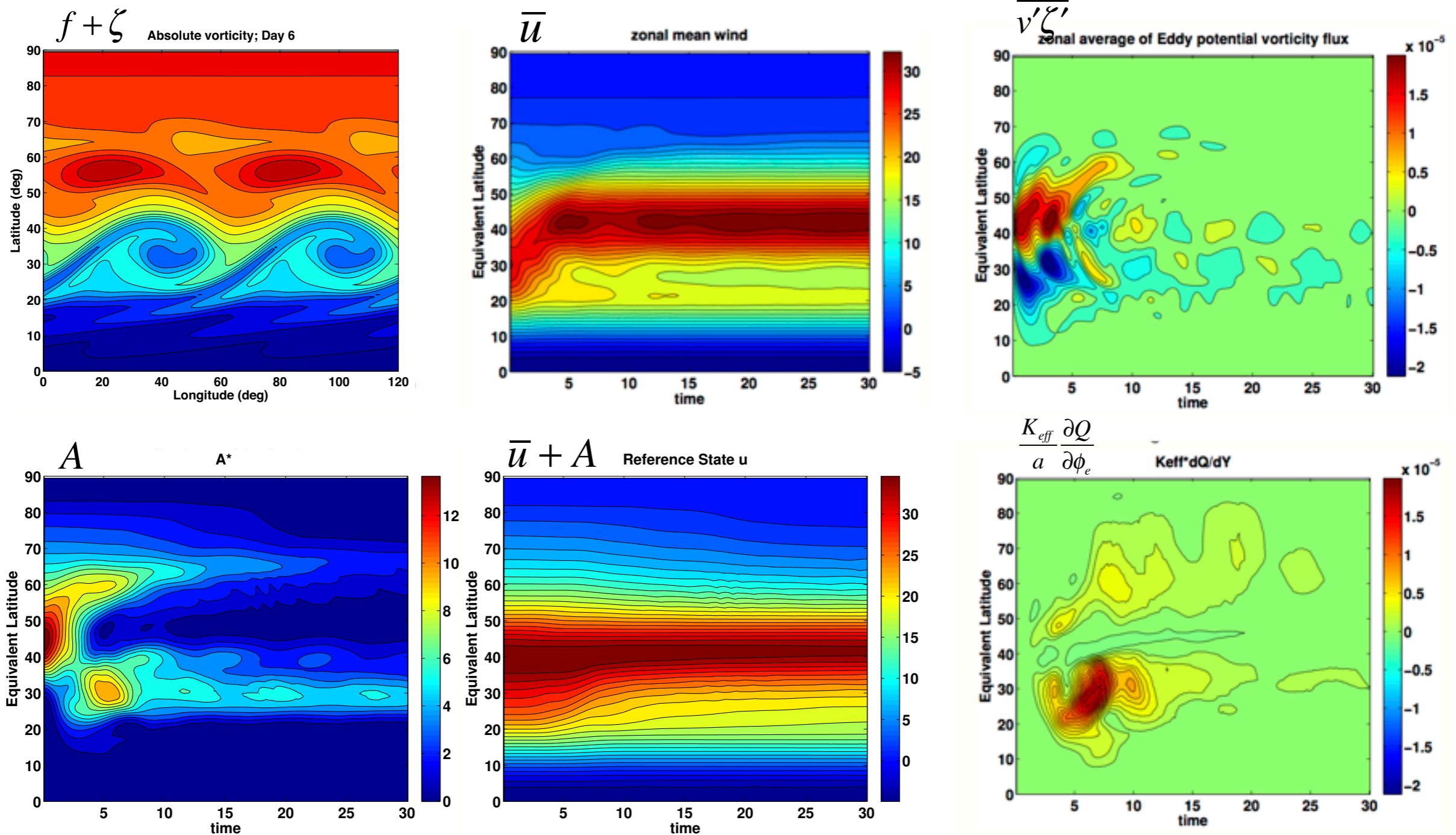
- 有限振幅非加速定理

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\bar{u} + A(\phi_e, t)) a \cos \phi_e] = -K_{eff} \cos \phi_e \frac{\partial Q}{\partial \phi_e}$$

混合がなければ右辺は消える

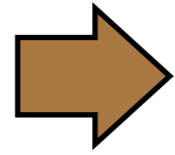
非加速定理を用いた診断

- ロスビー波の伝播と碎波 (Held & Phillips 1987)

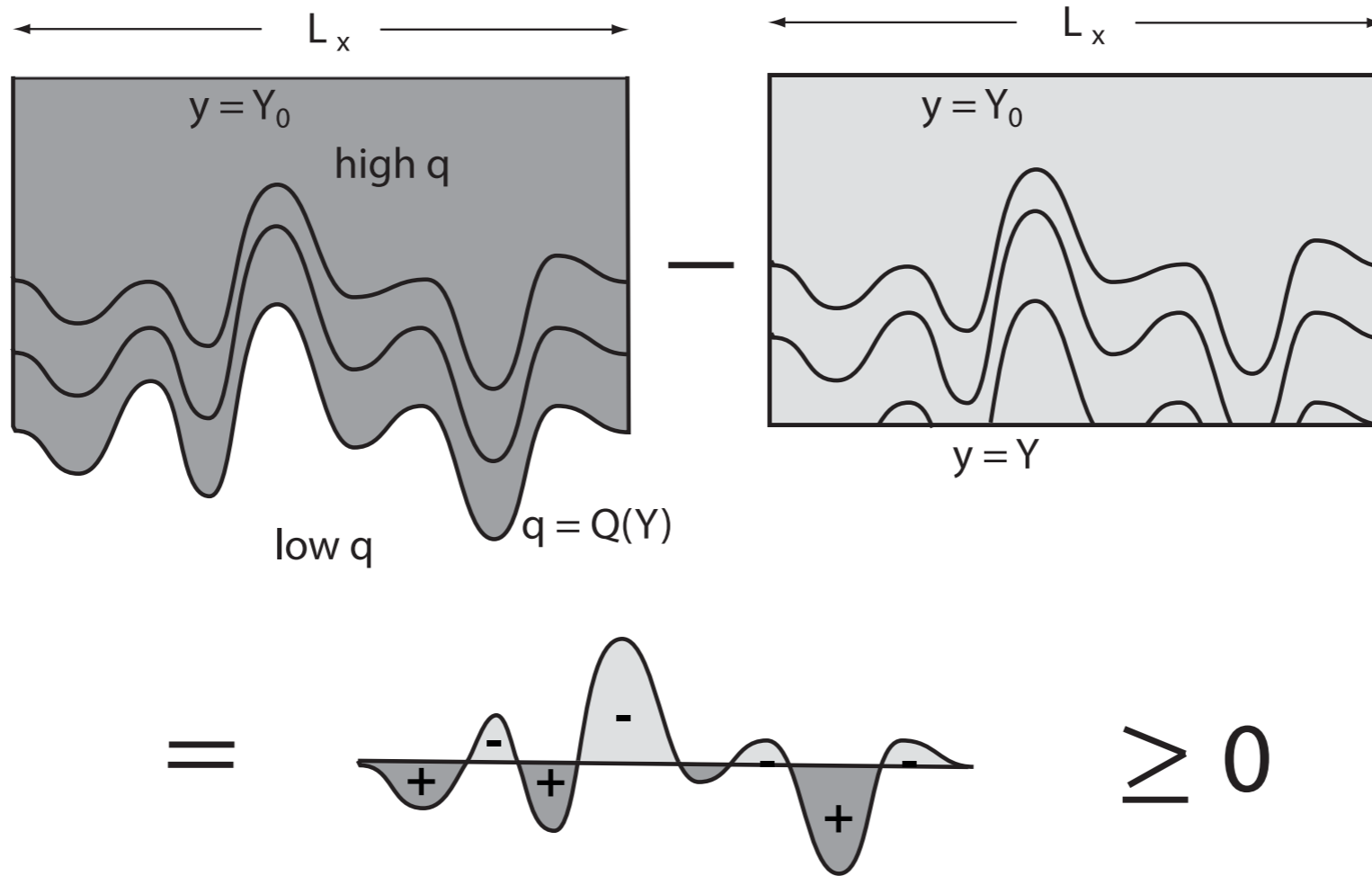


傾圧準地衡風力学への延長

$$A_L(y, z, t) = \frac{\overline{q'^2}}{2 \partial \bar{q} / \partial y}$$



$$A_{QG}(Y, z, t) = L_x^{-1} \left(\int_{q \geq Q(Y, z, t)} q dS - \int_{y \geq Y(Q, z, t)} q dS \right)$$

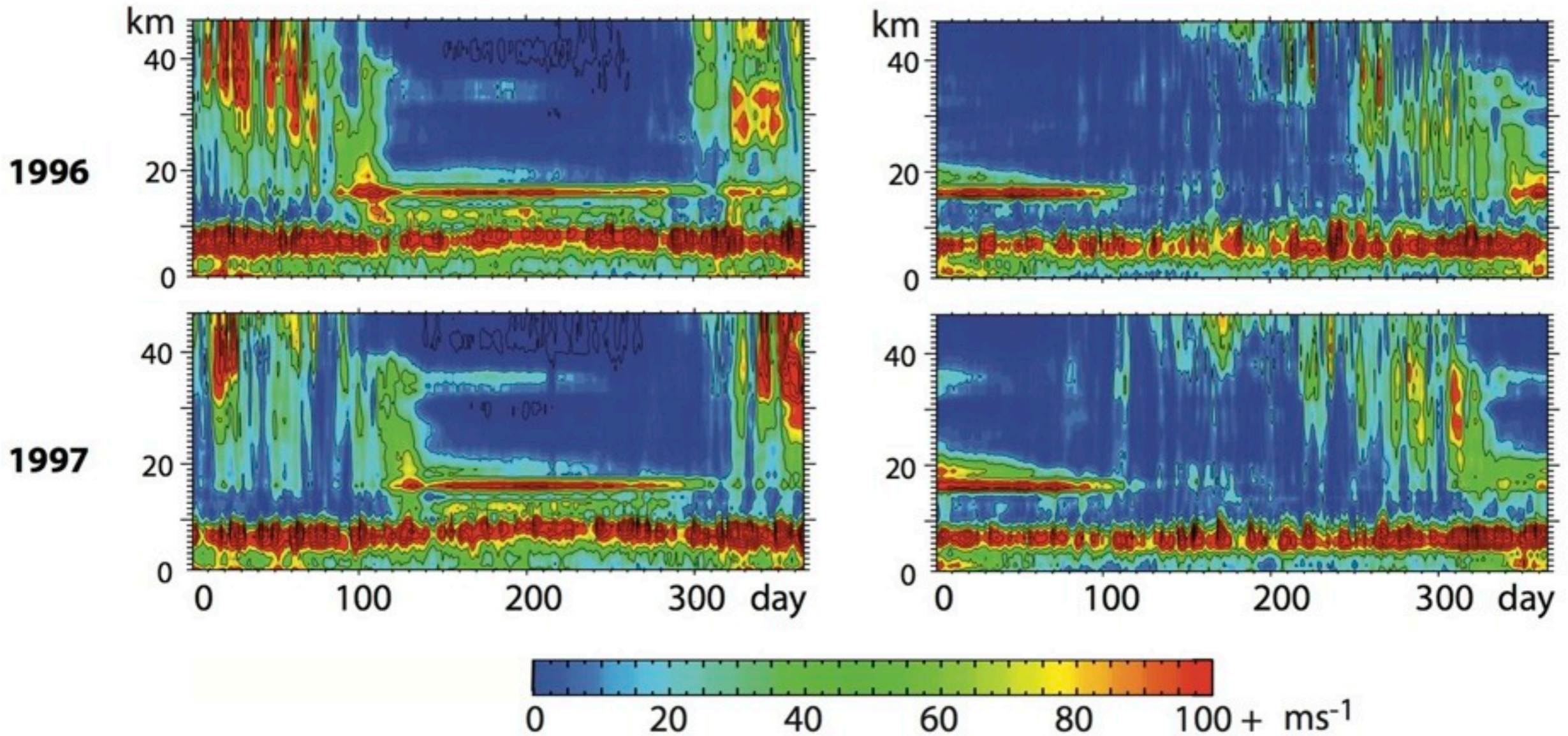


Nakamura and Zhu (2010a)

Daily A ERA-40 (Nakamura & Solomon 2010 JAS)

65°N

65°S



傾圧準地衡風力学への延長

- 有限振幅EP定理と非加速定理

$$\frac{\partial A_{\text{QG}}}{\partial t} + \overline{v'q'_{\text{QG}}} = S,$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right) = - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial A_{\text{QG}}}{\partial t} - S - \bar{X} \right) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{f_0 \overline{\delta \rho}}{d\theta_0/dz} \right)$$

cf. Charney-Drazin (1961)

形式は現行TEMと同一

傾圧準地衡風力学への延長

- 非加速定理を鉛直・緯度積分

$$\langle \cdot \rangle \equiv \frac{\int_0^\infty \rho_0(\cdot) dz}{\rho_0(0)H} \quad (\text{順圧成分})$$

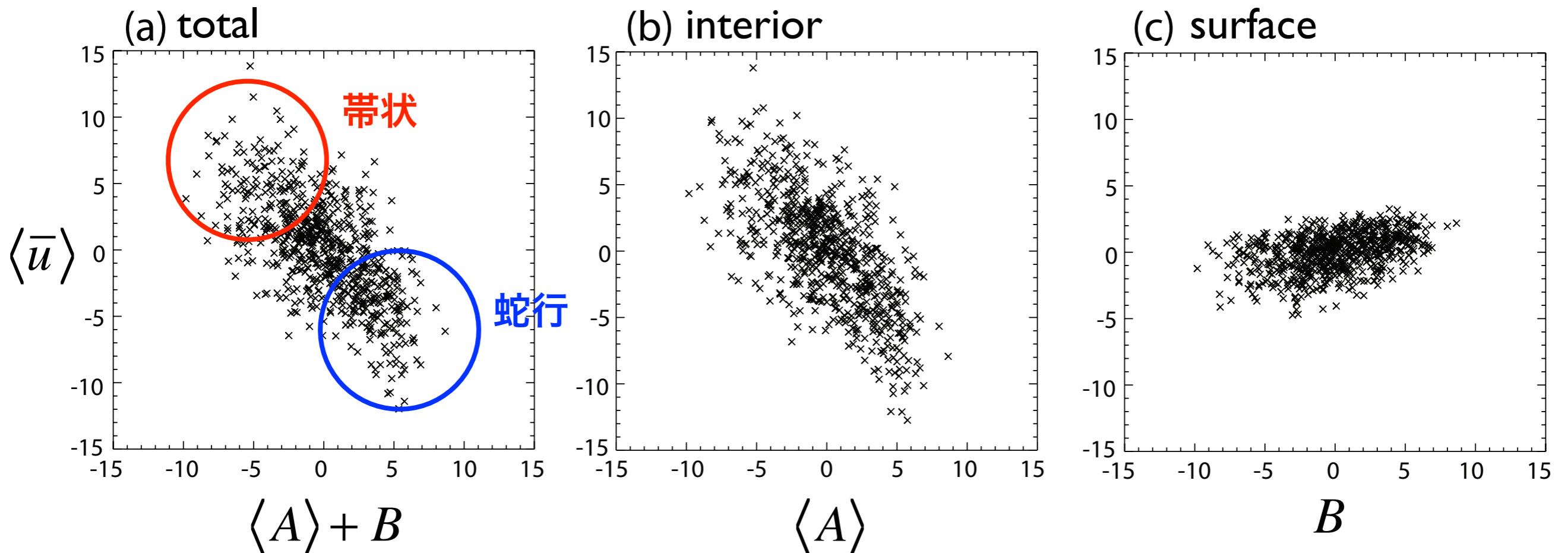
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \bar{u} \rangle + \langle A_{QG} \rangle \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{H} \int \left(\int \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} dy \right) dy \right)_{z=0} + n.c. \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} B + n.c. \end{aligned}$$

非加速定理を用いた診断

- 流れと擾乱の共変化

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\langle \bar{u} \rangle + \langle A_{QG} \rangle + B \right) = n.c.$$

50°S January daily 1979-2001 | ERA-40



傾圧準地衡風力学への延長

● 基準場 u_{REF} の導入

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \left[\frac{\partial(\bar{u} - u_{\text{REF}})}{\partial t} \right] = - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial A_{\text{QG}}}{\partial t} \right),$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \left(\frac{\partial u_{\text{REF}}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} (S + \bar{X}) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{f_0 \bar{\rho}}{d\theta_0/dz} \right).$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right) = -\frac{\partial \dot{Q}}{\partial y},$$

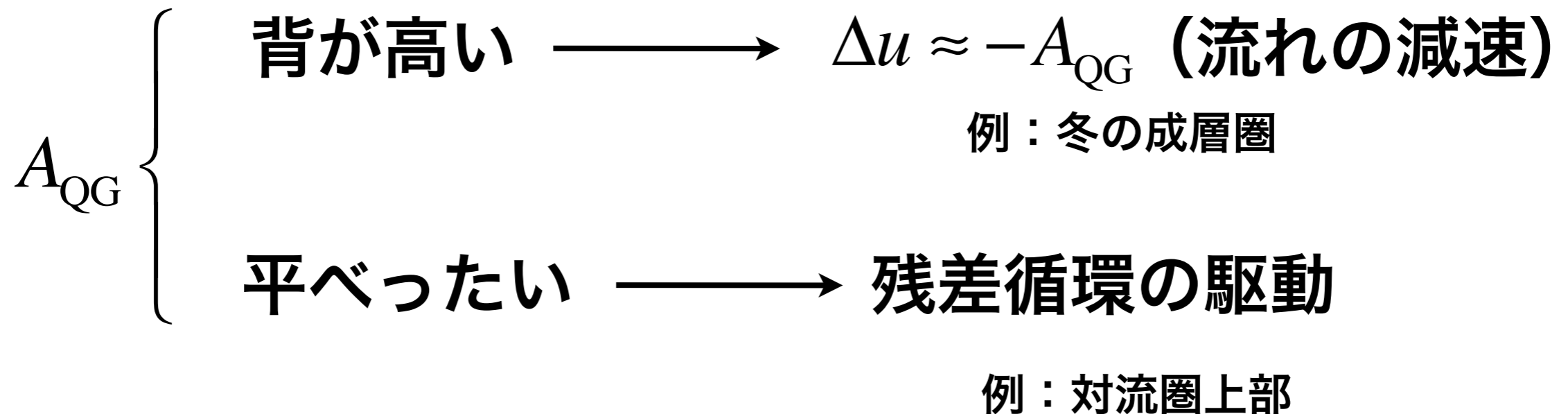
Q: 等価緯度の関数として表されたポテンシャル渦度

u_{REF} は非保存力に駆動され、ゆっくりり変化

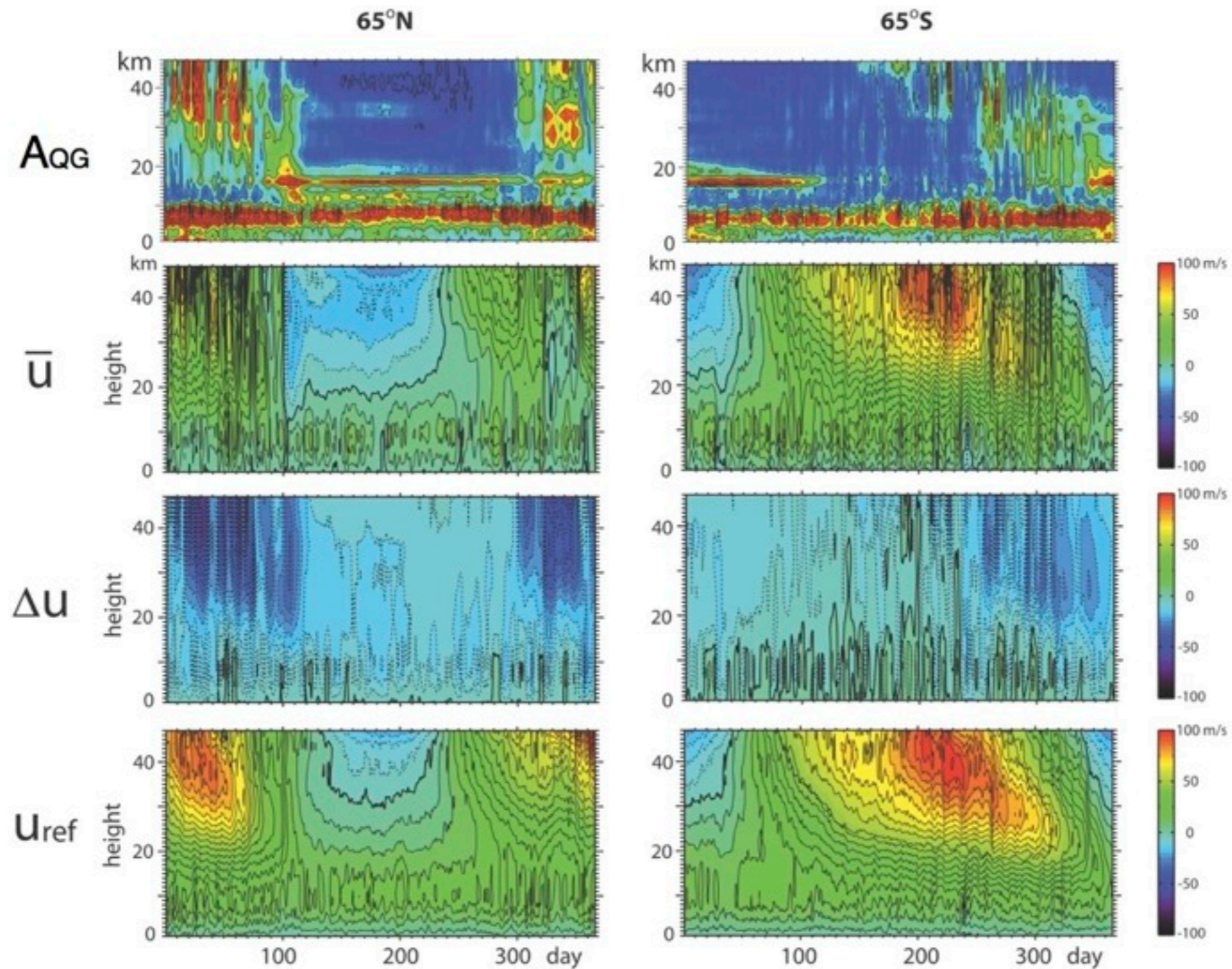
傾圧準地衡風力学への延長

- 擾乱が駆動する流れ $\Delta u \equiv \bar{u} - u_{\text{REF}}$

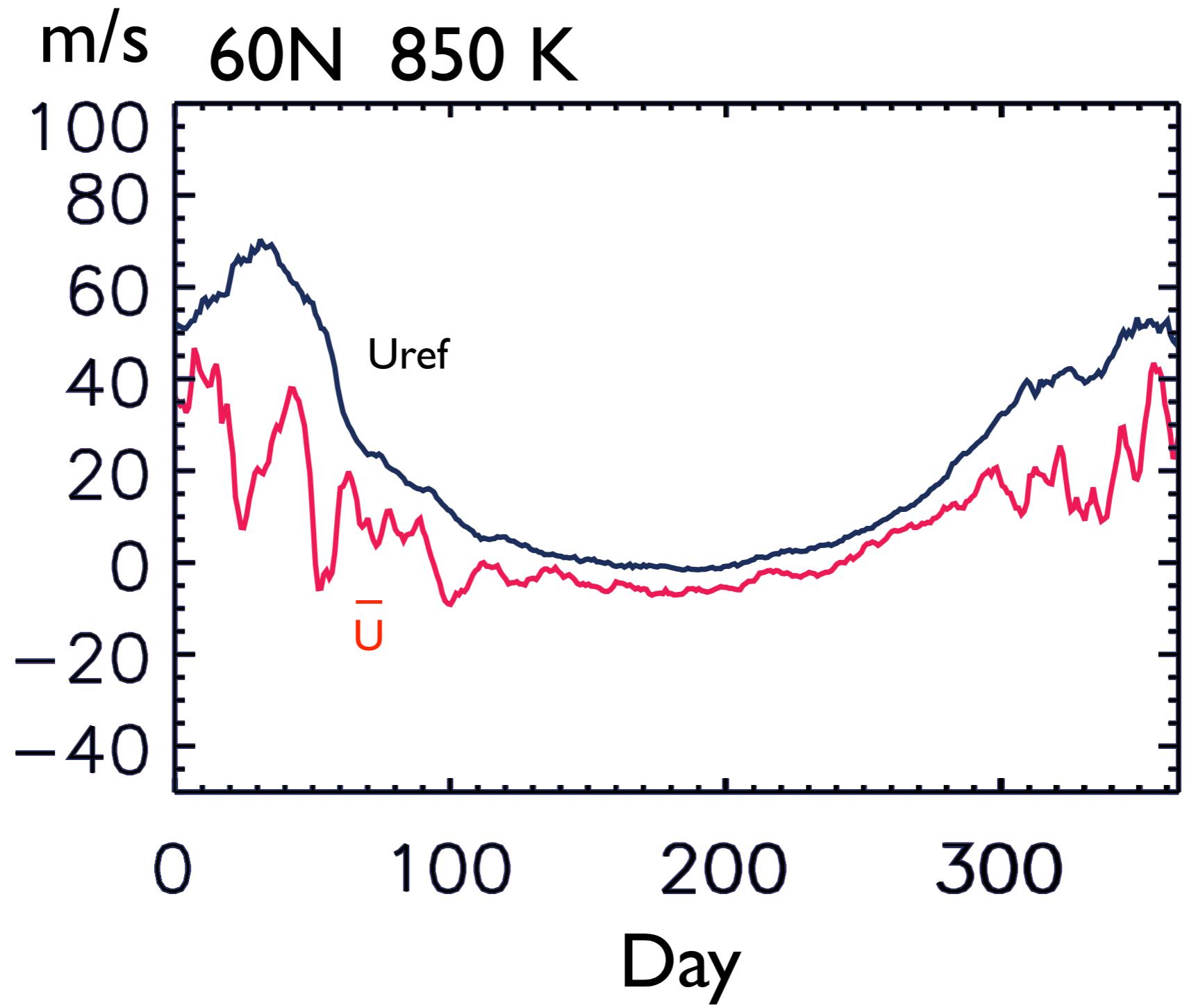
$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \Delta u = - \frac{\partial^2 A_{\text{QG}}}{\partial y^2}$$



$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] \Delta u = - \frac{\partial^2 A_{\text{QG}}}{\partial y^2}$$

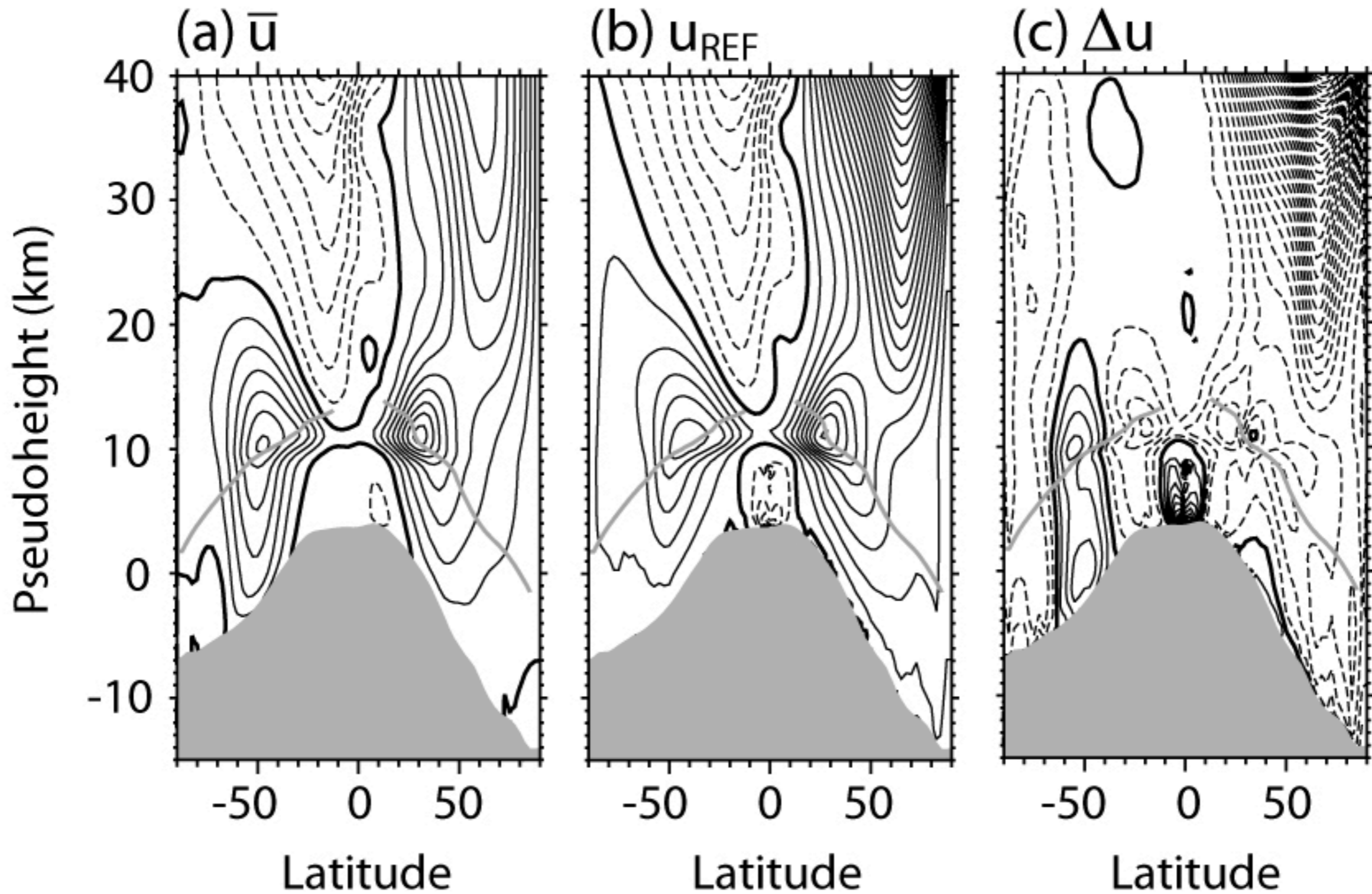


Nakamura and Solomon (2010, 2011)



ERA-40 | 1979-2001 | Climatology DJF

(Nakamura & Solomon 2011 JAS)

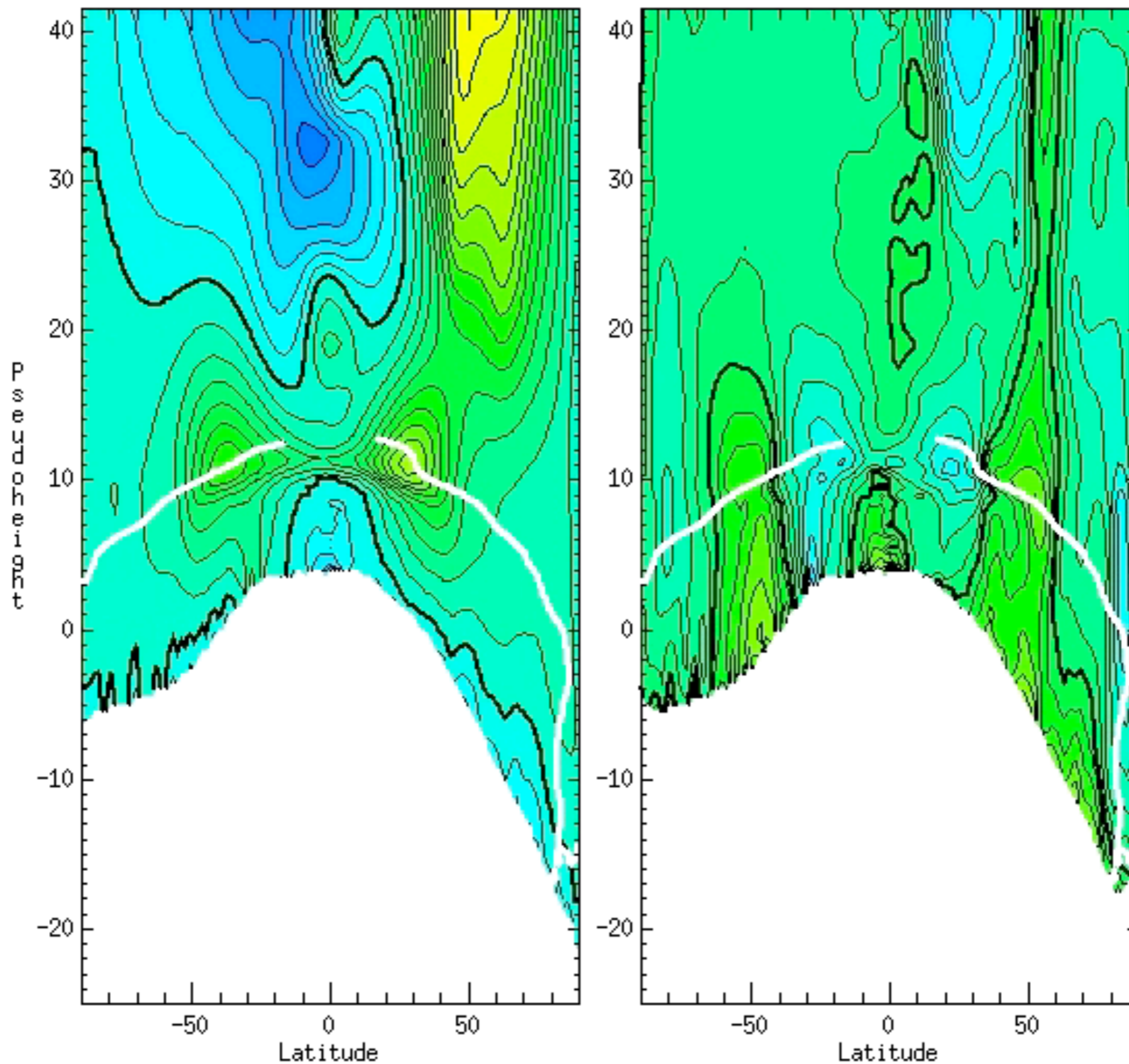


画像をクリックすると動画にリンクします

U_{REF}

1979 Month 01 Day 01 Hour 0000

ΔU



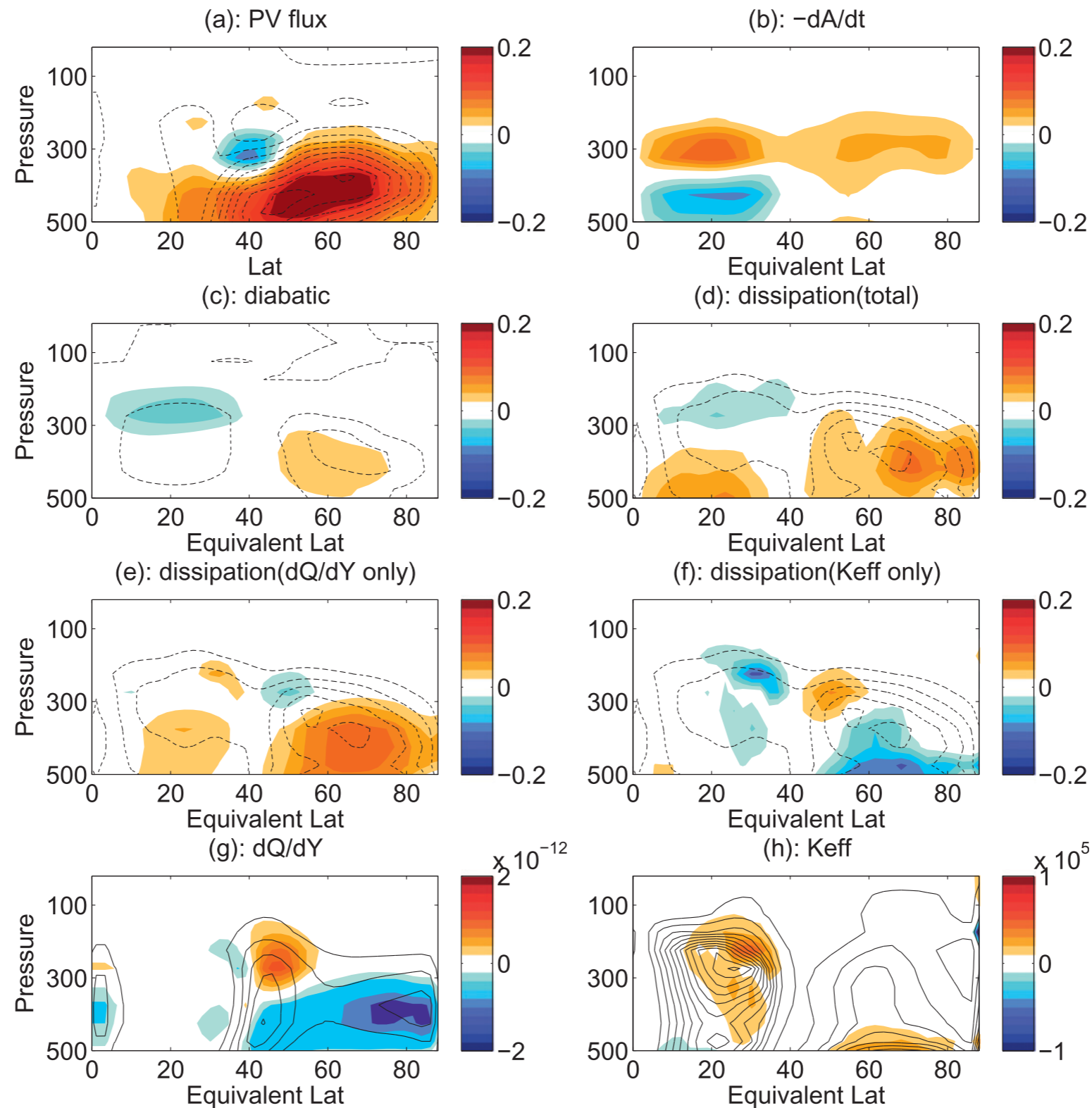


FIG. 9. The linear trends of the ensemble-mean wave activity budget [Eq. (16)] from day 13 to day 38 in the broad warming. (a) Eddy PV flux, (b) negative wave activity tendency, (c) total diabatic term change, (d) total dissipation change, (e) dissipation change resulting from PV gradient change, (f) dissipation change resulting from effective diffusivity change, (g) PV gradient change, and (h) effective diffusivity change. The contours in (a) are the climatological-mean PV flux. The contours in (c) are the climatological-mean diabatic term. The contours in (d)–(f) are the climatological-mean PV dissipation. The contour intervals in (a), (c)–(f) are $2 \text{ m s}^{-1} \text{ day}^{-1}$. The contours in (g), (h) are climatological-mean $(1/a)(\partial Q/\partial \phi)$ (interval of $4 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ s}^{-1}$) and K_{eff} (interval of $4.0 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$). Note that all panels are shown above 500 hPa.

有限振幅波の活動度まとめ

本研究

一般化された
ラグランジュ
平均 (GLM)

インパルス=
カシミリア法

保存則	ケルビン循環 ポテンシャル渦度	ケルビン循環	ケルビン=インパルス ポテンシャル渦度
非加速 定理	厳密 (ハイブリッド)	厳密 (ラグランジュ)	$O(\alpha^2)$ (オイラー)
基準場	PVケルビン循環 (等価緯度表示) +バランス	任意の帯状流	任意の準定常帯状流 +バランス
利点	波と帯状流の運動量 分配、混合の定量化 TEMの自然な拡張	一般性の高いコンセプト	局所的に適用可 ロスビー波+重力波
欠点	非局所的 ロスビー波限定	データ解析困難	厳密な非加速定理の不在

3者は、ゲージ変換により、相互に関連している (Solomon & Nakamura 2012)

参考文献

- Nakamura, N., 1996 Two-dimensional mixing, edge formation, and permeability diagnosed in an area coordinate. *J. Atmos. Sci.* 53, 1524-1537.
- Nakamura, N. & D. Zhu, 2010: Finite-amplitude wave activity and diffusive flux of potential vorticity in eddy-mean flow interaction. *J. Atmos. Sci.* 67, 2701-2716.
- Nakamura, N. & A. Solomon, 2010: Finite-amplitude wave activity and mean flow adjustments in the atmospheric general circulation. Part I. Quasigeostrophic theory and analysis. *J. Atmos. Sci.* 67, 3967-3983.
- Nakamura, N. & A. Solomon, 2011: Finite-amplitude wave activity and mean flow adjustments in the atmospheric general circulation. Part II. Analysis in the isentropic coordinate. *J. Atmos. Sci.* 68, 2783-2799.
- Solomon, A. & N. Nakamura 2012: An exact Lagrangian-mean wave activity for finite-amplitude disturbances to barotropic flow on a sphere. *J. Fluid Mech.* 69-92.