数値予報モデル概論

大気の支配方程式

- 運動方程式(予報)
  - 運動量についての方程式。3次元なので3方向。
  - 鉛直方向は、重力と気圧傾度がバランスしている「静力学平衡」と仮定する場合もあり
- 熱力学方程式(予報)
  - 温度、温位、熱エネルギーなどについての方程式(予報変数の取り方はモデルによる)
- 水蒸気の式(予報)
  - 水蒸気の質量(比湿)を予報変数に。
  - 水を雲などにカテゴリー分けして、雲物理の方程式を解くこともあり
- 状態方程式(診断)
  - 気圧・温度・密度の関係
- 連続の式

運動方程式 (水平方向)

x方向 $$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z} \right] + 2\Omega v \sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{F}_x$$

y方向 $$\frac{\partial v}{\partial t} = \left[-u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z} \right] - 2\Omega u \sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{F}_y$$

ある地点で見た水平風の時間変化 = 移流の効果 + コリオリの効果 + 水平の気圧傾度力 + 摩擦力・物理過程

x:	東西方向の座標	u:	風速の x 方向の成分	ρ:	密度
y:	南北方向の座標	v:	風速の y 方向の成分	φ:	緯度
z:	鉛直方向の 座標	w:	風速の z 方向の成分	Ω:	地球の自転の角速度
t:	時間	p:	気圧	g:	重力加速度

運動方程式 (鉛直方向)

- 静力学平衡の近似
  水平運動のスケール >> 鉛直運動のスケール のときOK

鉛直方向の気圧傾度力と重力が釣り合うとする近似 (静力学平衡の近似) が高い精度で成り立つ

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

鉛直の気圧傾度力と重力がつりあっている

高・低気圧のような空間スケールでは、鉛直加速度は無視できるほど小さい
(鉛直速度そのものは無視できない)

- 非静力学モデルの場合

メソスケール現象では鉛直スケールと水平スケールが同じ程度になる場合があるので、静力学平衡の近似が成り立たない。予報変数に鉛直方向の速度を含む

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left[-u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z} \right] - 2\Omega \cos\phi\, u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \mathbf{F}_z$$

ある地点で見た鉛直風の時間変化 = 移流の効果 + コリオリの効果 + 鉛直の気圧傾度力 + 重力 + 摩擦力・物理過程

質量の保存 (連続の式)

- 質量保存の法則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left[-u\frac{\partial \rho}{\partial x} - v\frac{\partial \rho}{\partial y} - w\frac{\partial \rho}{\partial z} \right] - \rho\left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

ある地点で見た密度ρの時間変化 = 移流の効果 + 収束発散による密度変化

熱エネルギーの保存
気体の状態方程式

- 熱エネルギーの保存

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\left[-u\frac{\partial\theta}{\partial x}-v\frac{\partial\theta}{\partial y}-w\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\mathrm{H}$$

θ: 温位

ある地点で見た温位θの時間変化	=	移流の効果	+	非断熱過程による温位の変化

(診断方程式)

気体の状態方程式: $p=\rho RT$

R: 気体定数　T: 気温

水蒸気の保存

- 水蒸気の保存

$$\frac{\partial q}{\partial t}=\left[-u\frac{\partial q}{\partial x}-v\frac{\partial q}{\partial y}-w\frac{\partial q}{\partial z}\right]+\mathrm{M}$$

ある地点で見た水蒸気qの時間変化	=	移流の効果	+ 非断熱過程による加湿

q: 比湿 (モデリングの分野では混合比と呼ぶことがある)

- 雲物理過程を導入したモデルでは、雲水、雲氷、雨、雪、あられの混合比 (q_c, q_i, q_r, q_s, q_g) を追加
  - 全球モデル　: q, q_c
  - メソモデル　: q, q_c, q_i, q_r, q_s, q_g

数値予報モデルとは？

- 計算機上に仮想の大気を構築し、その大気を**物理法則**に従って**時間発展**させて、未来の大気の状態を**数値解**として(解析的にではなく)予報すること。
  - 物理法則
    - 各種物理量の**保存**を表す式(支配方程式)
      - 質量(密度)、運動量、エネルギー、水など
    - 各種物理量の関係を表す方程式 (状態方程式)
    - その他　$\frac{\partial\phi}{\partial t}=F(\phi)$
  - 時間発展
    - 支配方程式は一般に時間微分を含む偏微分方程式
    - 「時間発展させる」=偏微分方程式を**解く**。
    - 時間発展させる変数＝解く変数: **予報変数**
    - この偏微分方程式の解は物理量φを時間と空間の関数で与えられる。

解析的に解ける偏微分方程式

- 移流方程式　$\frac{\partial\phi}{\partial t}=-c\frac{\partial\phi}{\partial x}$
  - 一般解: $\phi(x,t)=f(x-ct)$　　いずれもcは定数 f, g は任意関数
- 波動方程式　$\frac{\partial\phi}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$
  - 一般解: $\phi(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct)$
- しかし、このように解析的に解ける方程式はわずかで、ほとんどは数値計算で解く必要がある。

偏微分方程式を数値的に解く

- 支配方程式に現れる**変数を具体的な数値に**置き換えて解を求める。
- そのためには、方程式に現れる**微分操作も数値で表さなければならない。**
  - 微分の定義:　$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x-\Delta x,t)-\phi(x,t)}{\Delta x}$
    - **無限小の距離にある2点の変化率**
    - 計算機では無限小への極限の計算は不可能。

数値計算における微分

- 計算機での微分計算
  - 無限小の距離を**有限の距離に置き換える**(格子点法)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x,t)}{\Delta x}\\&\simeq\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x,t)}{\Delta x}\\&\simeq\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}\\&\simeq\frac{4}{3}\frac{\phi(x+\Delta x,t)-\phi(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}-\frac{1}{3}\frac{\phi(x+2\Delta x,t)-\phi(x-2\Delta x,t)}{4\Delta x}\\&\simeq\cdots\end{aligned}$$

  - 微分する関数を(完全系を張って一様収束する)**級数展開**で表現して、級数の各項の**解析的な微分の有限和**で計算(スペクトル法)

$$\phi(x,t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\phi_n(x,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x,t)$$

$$\sim\sum_{n=1}^{N}a_n\frac{\partial}{\partial x}\phi_n(x,t)$$

時間離散化

- **時間方向は格子点法**で離散化して微分を計算
  - スペクトル法は未来のすべての時刻の情報が必要であり、未来の値を求める目的には合わない。
    - c.f. フーリエ変換 $\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt$
  - 離散化したときの時間幅がタイムステップ
- 微分の離散化の方法は**一意ではない**。
  - いくつかのものはあとで。
    - 前方差分、後方差分、リープフロッグ、Runge-Kutta など
  - 手法によって、計算安定性、精度が異なる。

時間離散化:前方差分の場合

$$\underbrace{\phi(x, t+\Delta t)}_{\text{未来値}} = \underbrace{\phi(x)}_{\text{現在値}} + \underbrace{F(x, \phi(x,t), \partial\phi(x,t), \cdots)}_{\text{現在値から計算した時間変化率}} \underbrace{\Delta t}_{\text{時間積分幅}}$$

- 必要な操作(各空間格子点ごとに)
  - **時間変化率(F)を求めること**
    - 基本は現在の値(既知)を用いて評価
    - Fはさまざまな量の関数
  - **次の時間の物理量の値を求めること**(時間積分)
    - 時間変化率に時間積分幅を乗じた値を現在値に加えて、未来値を求める。

離散化と平均操作

- 離散化された変数は、空間的･時間的に平均された物理量を示すと考える。
- 平均された物理量についての支配方程式は支配方程式に平均化操作することで得られる。
  - 線形な部分は平均化された変数に置き換えればよいが、非線形部分(移流項)からは、平均化操作に寄る余分な項が出てくる＝物理過程で詳しく

離散化 (時間発展)

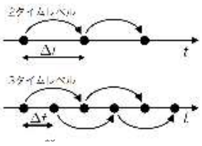
- 基礎方程式系は非線型連立偏微分方程式
  ←解析的に解くことはできない
  →微小な時間 Δt (時間ステップ) で離散化して、数値積分

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = F \quad \xrightarrow{\text{離散化}} \quad \phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F_t \Delta t$$

  - この時間積分法 (前進スキーム) では計算が不安定になるので、実際は異なるスキームを用いる
- 計算時間を短くするためには Δt を長くしたい

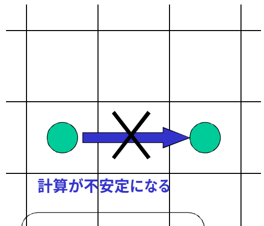
いろいろな時間積分法

- 2タイムレベル法
  - (n+1)Δtを計算するのに、nΔtと(n+1) Δtの値を使う
  - 例：オイラー（前進）スキーム、後方スキーム、台形スキーム、松野スキーム、ホインスキーム
- 3タイムレベル法
  - (n+1)Δtを計算するのに、 (n-1) Δt とnΔtと(n+1) Δtの値を使う
  - 例：リープフロッグスキーム（中央差分法）、アダムス･バッシュフォーススキーム、アダムス･モールトンスキーム
- その他
  - 例：ルンゲ･クッタスキーム



気象庁 Japan Meteorological Agency

時間ステップに関する制限



$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{u}$$

- 1 回の時間ステップで隣の格子を飛び越えてはいけない

→時間ステップの大きさは格子の大きさにより制限される（CFL 条件）

→格子間隔 5 km のメソモデルでは Δ*t* = 20 秒

※CFL条件（Courant-Friedrichs-Lewy Condition）

気象庁 Japan Meteorological Agency

モデルの格子間隔を小さくする

- 利点
  - 細かい地形の表現が可能で、計算精度が高くなる
- 難点
  - 分割する格子の数が増える
    - →予報領域が同じなら計算量が増える
  - 1 回の時間ステップを短くしなければならない
    - →予報時間が同じなら計算量が増える

→計算時間が制限される現業モデルでは妥協が必要

気象庁 Japan Meteorological Agency JMA

いろいろな時間積分法

2タイムレベル法

- オイラー（前進）スキーム
- 後方スキーム
- 台形スキーム
- 松野スキーム
- ホインスキーム

3タイムレベル法

- リープフロッグスキーム
- アダムス･バッシュフォーススキーム
- アダムス･モールトンスキーム

その他

- ルンゲ･クッタスキーム

気象庁 Japan Meteorological Agency JMA

微分から差分へ

基本はテーラー展開

$$\phi(x \pm \Delta x) = \phi(x) \pm \frac{(\Delta x)^1}{1!}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{(\Delta x)^4}{4!}\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \cdots$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \cdots$$

“1次のオーダーの精度”
$O(\Delta x)$ という

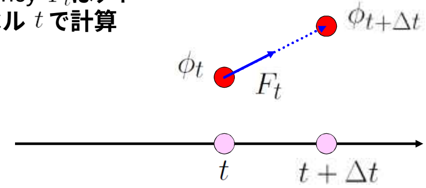
気象庁 Japan Meteorological Agency JMA

オイラー（前進）スキーム

実用的には常に計算不安定を起こす

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F_t \Delta t$$

Tendency F_tはタイムレベル t で計算



前方差分型：$O(t)$

気象庁 Japan Meteorological Agency JMA

オイラー (前進) スキームの安定性 (フォンノイマン法)

$$\boxed{\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F_t \Delta t}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_t &= \exp(-i\omega t) \\ F_t &= -i\omega\phi_t \end{aligned}\right\}$$ 波動解を仮定

$$\boxed{\phi_{t+\Delta t} = \lambda\phi_t}$$

$$\lambda = (1 - i\omega\Delta t)$$ 複素増幅率 $\left\{\begin{array}{ll} |\lambda| < 1 & \text{安定} \\ |\lambda| = 1 & \text{中立} \\ |\lambda| > 1 & \text{不安定} \end{array}\right.$

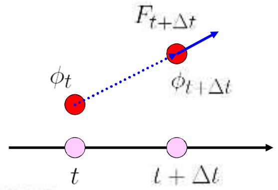
$$|\lambda|^2 = 1 + (\omega\Delta t)^2 > 1$$

後方スキーム

計算安定性が良い。

$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F_{t+\Delta t}\Delta t$$

$F_{t+\Delta t} = f(\phi_{t+\Delta t})$



未来の時間変化量 $F_{t+\Delta t}$ を使用 (インプリシットスキーム)

F が ϕ について線形でなく非線形だと適用が困難

後方差分型: $O(t)$

イクスプリシットとインプリシット

□イクスプリシット法 (陽解法)

- 既知の量 (現在値、過去値) だけで未来値が決まる。
- 定式化が簡単、計算量少ない。
- 計算安定性を保つために工夫が必要。

□インプリシット法 (陰解法)

- 未来値を求めるために未知の量 (未来の時間変化量) を用いる。
- 計算安定性が高い。
- 非線形方程式では定式化が困難、線形方程式の場合には連立方程式となり、ソルバの工夫が必要。

簡単な例

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} f$$ を考える。

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} f^{t} \rightarrow f^{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) f^t, \quad \text{explicit}$$

$$\frac{f^{t+\Delta t} - f^t}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} f^{t+\Delta t} \rightarrow f^{t+\Delta t} = \frac{1}{1 + \dfrac{\Delta t}{\tau}} f^t, \quad \text{implicit}$$

時間離散化でimplicitとexplicitの違いは右辺に現在値 (過去値も可) を使うか (explicit) 、未来値を使うか (implicit) の違い。
この例ならimplicitでも簡単に$f^{t+\Delta t}$=の形に変形できる。

連立方程式を導く例

1次元拡散方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \ \text{(境界条件)}$$

時間微分を1次差分に、空間微分はf^{t+1}を使って2次差分にする。

$$\frac{f_x^{t+1} - f_x^t}{\Delta t} = \kappa\frac{f_{x+1}^{t+1} - 2f_x^{t+1} + f_{x-1}^{t+1}}{\Delta x^2} \rightarrow$$

$$-\frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} f_{x+1}^{t+1} + \left(1 + \frac{2\kappa\Delta t}{\Delta x^2}\right) f_x^{t+1} - \frac{\kappa\Delta t}{\Delta x^2} f_{x-1}^{t+1} = f_x^t \quad (x = 1\cdots n)$$

$$\frac{f_x^{t+1} - f_x^{t+1}}{\Delta x} = 0 \rightarrow f_1^{t+1} = f_0^{t+1}, \quad f_{n+1}^{t+1} = f_n^{t+1} \quad \text{(境界条件)}$$

未知数が$f_0^{t+1} \cdots f_{n+1}^{t+1}$のn+2個, 式も同数。

連立方程式を行列で表わす。

前述の式をそのまま解いても構わないが、x=0, n+1を消去し、$c_x = \kappa\Delta t/\Delta x^2$と置いて行列形式で表わすと、

$$\begin{pmatrix} 1+c_n & -c_n & & & & & 0 \\ -c_{n+1} & 1+2c_{n+1} & -c_{n+1} & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & -c_3 & 1+2c_3 & -c_3 & & \\ & & & -c_2 & 1+2c_2 & -c_2 & \\ 0 & & & & & -c_1 & 1+c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n^{t+1} \\ f_{n-1}^{t+1} \\ \vdots \\ f_3^{t+1} \\ f_2^{t+1} \\ f_1^{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n^t \\ f_{n-1}^t \\ \vdots \\ f_3^t \\ f_2^t \\ f_1^t \end{pmatrix}$$

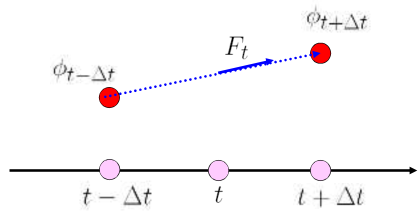
となる。1次元であれば三重対角行列でありガウスの消去法で簡単に解けるが、多次元になると複雑になる。

連立方程式の解法

- 直接法
  - 正確な解が求まるが計算量や使用メモリが多い。小規模な問題で使うことが多い。
  - ガウスの消去法、LU分解、dimension reduction、 …
- 反復法
  - 反復計算により解を求める。大規模かつ疎行列の問題に特に効果的。
  - 緩和法
    - 逐次近似を行って解を求める。収束はやや遅い。
      - ヤコビ法、ガウス･ジョルダン法、SOR法、PSOR法、…
  - 勾配法
    - 反復の際の解を探す方向を工夫して収束を早める。ベクトルの内積計算があり、並列計算に工夫が必要。
      - 共役勾配法、共役残差法、一般化共役残差法、…
- その他：マルチグリッド法
  - 解像度の異なる格子系を準備して各格子系で上述の手法を用いて解を求める。

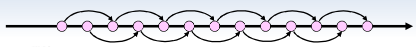
リープフロッグスキーム

$$\boxed{\phi_{t+\Delta t} = \phi_{t-\Delta t} + 2F_t\Delta t}$$



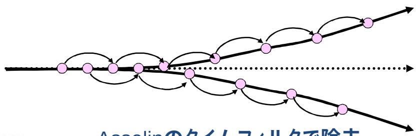
前方差分型：$O(\Delta t^2)$

リープフロッグスキーム



$$\phi_{t+\Delta t} = \lambda\phi_t$$
$$\phi_t = \lambda\phi_{t-\Delta t} \quad\Rightarrow\quad \lambda = -i\omega\Delta t \pm \sqrt{1-(\omega\Delta t)^2}$$
$$\lambda^2 + 2i\omega t\lambda - 1 = 0$$
$$|\omega\Delta t| \le 1 \quad\Rightarrow\quad |\lambda| = 1$$

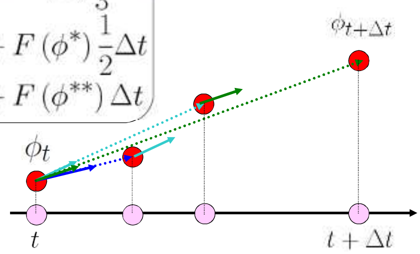
物理モード
計算モード



Asselinのタイムフィルタで除去

ルンゲクッタスキーム (3段)

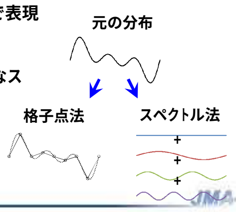
$$\phi^* = \phi_t + F(\phi_t)\frac{1}{3}\Delta t$$
$$\phi^{**} = \phi_t + F(\phi^*)\frac{1}{2}\Delta t$$
$$\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + F(\phi^{**})\Delta t$$



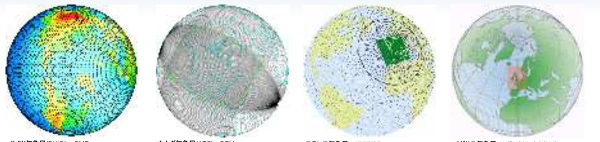
ルンゲクッタスキームは一般形から様々な式が得られるがそのうちの一つ。
イクスプリシットに計算可能。精度はほぼ3次。ARW, LM, asucaで採用。

離散化 (水平方向)

- 格子点法
  - (現在の) メソモデルで採用
  - 連続体の状態を有限個の格子点値で代表させて表現
- スペクトル法
  - 全球モデルで採用
  - さまざまな波長をもつ波の重ね合わせで表現
- 注意点
  - モデルの格子間隔の5～8倍よりも小さなスケールの現象は表現できない
  - 離散化にあたり、
    - ⑴ 対象とする現象のスケール
    - ⑵ 計算安定性･計算効率･計算精度
  - を考慮する



いろいろな格子

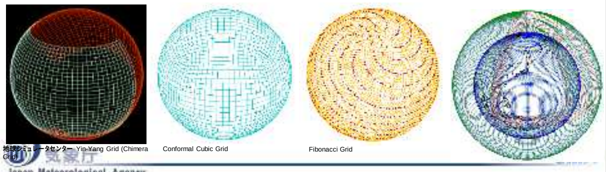


ドイツ気象局(DWD)　GME
コロラド州立大学　BUGS
地球フロンティア・東大CCSR　NICAM

カナダ気象局(AES)　GEM

フランス気象局　ARPEGE

イギリス気象局 Unified Model (UM)

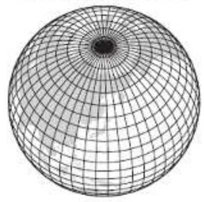


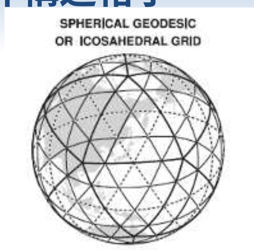
地球シミュレータセンター Yin-Yang Grid (Chimera Grid)

Conformal Cubic Grid

Fibonacci Grid

構造格子と非構造格子





構造格子　　非構造格子

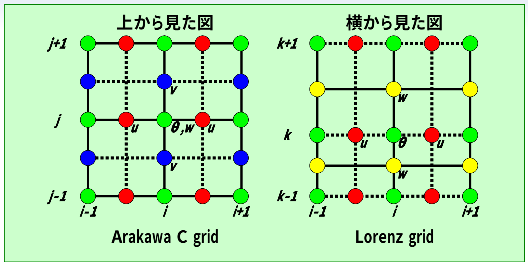
構造格子では格子が規則正しく並んでいるのに対し、
非構造格子ではそうではない。

図はWilliamson (2007)から引用。

構造格子と非構造格子の比較

- 構造格子
  - 格子が規則正しく配置。
  - 計算機で取り扱いやすい。
  - 高次の差分式を作りやすい。
- 非構造格子
  - 任意の位置に格子を置くことができる。
    - 計算領域が複雑でも一様な格子を作りやすい。
    - 必要に応じて高／低密度に格子を配置することができる。

代表的な空間離散化



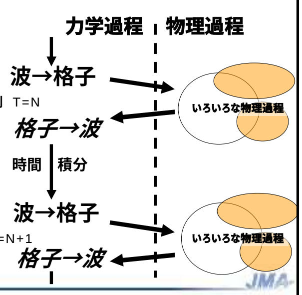
- u,vはそれぞれ、x,y方向に半格子ずれて配置される
- wは鉛直方向に半分ずれて配置される

=スタガード格子。空間差分の誤差が小さくなる

スペクトル法における波と格子の変換

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) \mathrm{e}^{ikx} dk$$

- 力学過程は波数空間で計算
- 物理過程は格子 (変換格子) 空間で計算
- 時間積分の１ステップごとに波と格子の変換が必要
  - 膨大な計算量
  - 高速フーリエ変換
  - 微分が正確に表現できるなど精度は良い



全球スペクトルモデル

- 球面上の任意関数は球面調和関数で展開できる(球面調和展開、ラプラス展開)

$$X(\lambda,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \langle X, Y_n^m \rangle \, Y_n^m(\lambda,\phi)$$

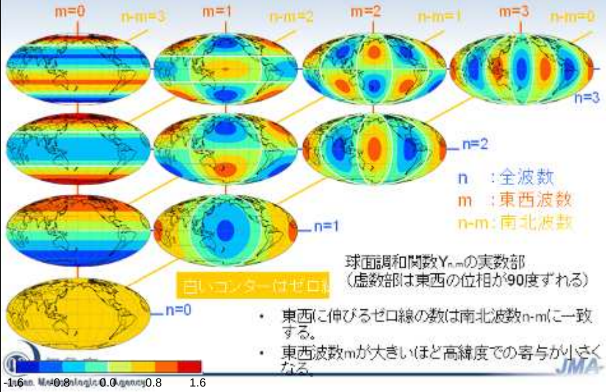
X：

$$\langle X, Z \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} X(\lambda,\phi) Z^*(\lambda,\phi) \cos\phi \, d\lambda \, d\phi$$

- 微分も級数展開で表現される
- 鉛直方向は格子点法で離散化

42

GSMの基底は球面調和関数

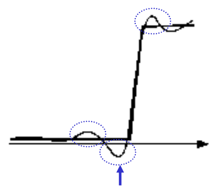


スペクトル法の長所と短所

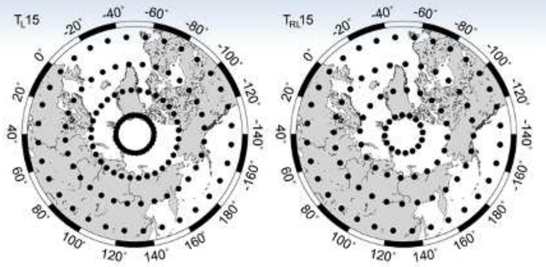
- 長所
  - 微分係数を正確に計算できる
  - 位相の遅れが生じない

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

- 短所
  - 波と格子の変換に要する計算量が膨大
  - 地形や水蒸気の分布など、局所性が高い変数を扱うときに偽の波が生じる（ギブスの現象）



リデュースドガウス格子(GSM)



標準ガウス格子（TL15）

リデュースドガウス格子（TL15）

極に近づくにつれ、東西格子数を減らしているのが特徴。

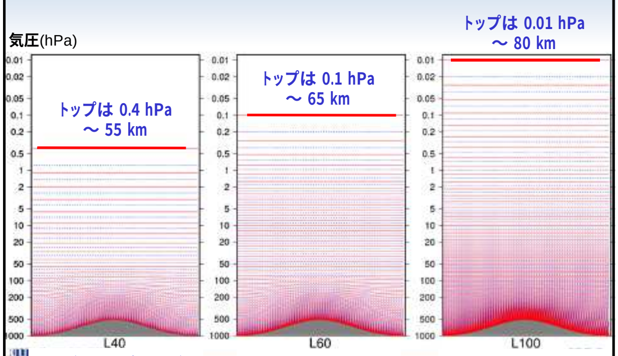
離散化（鉛直方向）

- z 座標：高度を基準とする座標
- p 座標：気圧を基準とする座標
- σ座標：気圧を尺度とした地形に沿う座標
- p-σ座標（η座標）：下層ではσ座標に、上層にいくにしたがって p 座標に近づく座標
  - 全球モデルで採用（上端0.1hPa～約65km）
- 下層では地形に、上層では高度に沿う座標
  - メソモデルで採用（上端22km）

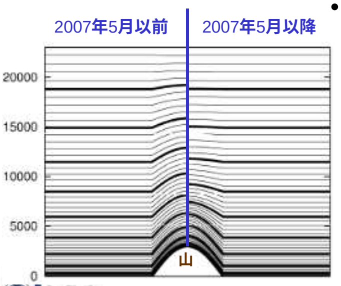
鉛直離散化の方法

- 大気モデルでは格子点法(差分法)が好まれる
  - 要素によって互い違いの配置
    - 「フルレベル」と「ハーフレベル」
    - 格子中央と上下の壁、“tracer level” と “interface level”
    - フラックスを壁、すなわちハーフレベルに定義するとよい。
  - 代表的な配置様式
    - ローレンツグリッド
    - チャーニー・フィリップス(CP)グリッド
- 下部境界の扱いを考慮
  - 地形に沿う座標系とすることが多い
- 可変格子
  - 下層と上層で必要な分解能が異なる

離散化（鉛直方向）：全球モデル

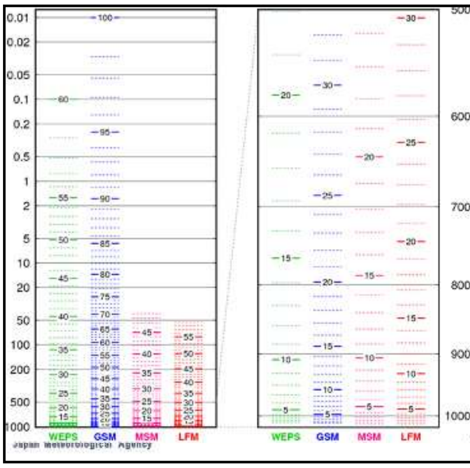


離散化(鉛直方向)：メソモデル



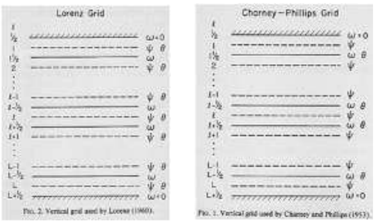
- 地形に沿って、大気を層状に区切る
  - 図の右半分の配置が現在の メソモデルの鉛直座標
  - 2007年5月以前(左)と比べて、上層では山による凸凹の影響が小さい

鉛直離散化の比較



鉛直に互い違いの配置

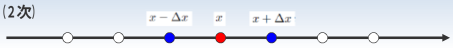
- ローレンツグリッド (NHM, asuca, ARW...)
  - 流線関数φと温位θをフルレベルに配置
- CPグリッド (UM...)
  - 流線関数はフルレベルに、温位はハーフレベルに配置



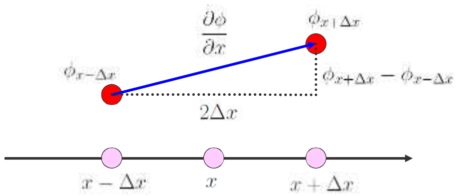
Arakawa, A. et al. (1988) *J.Atmos.Sci.*, 45. より

空間1階微分の差分式

中央差分 (2次)

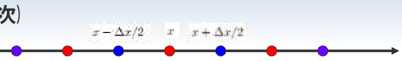


$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{x+\Delta x} - \phi_{x-\Delta x}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$



空間2階微分の差分式

中央差分 (2次)



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{x+\Delta x/2} - \phi_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

繰り返し適用する

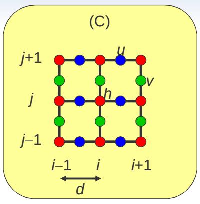
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x+\Delta x/2} - \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x-\Delta x/2}}{\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

$$= \frac{\phi(x+\Delta x) - 2\phi(x) + \phi(x-\Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x-\Delta x) \\ \phi(x) \\ \phi(x+\Delta x) \end{pmatrix} + O(\Delta x^2)$$

スタガード格子(互い違いの配置)

- 例えば、荒川C格子
  - 右図で、赤丸におけるuやvの微分を計算する
- NHM, asuca で採用



$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(x+\Delta x/2) - \phi(x-\Delta x/2)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{24}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi(x+\Delta x) - \phi(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{6}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + O(\Delta x^4)$$

スタガード格子のほうが主要な切断誤差が小さくなる

有限体積法（1）

- 領域を微小領域に分割し、境界でのフラックスの出入りを評価する。

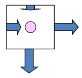
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{u}) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV + \oint \rho \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

連続の式の微分形（左）と積分形（右）

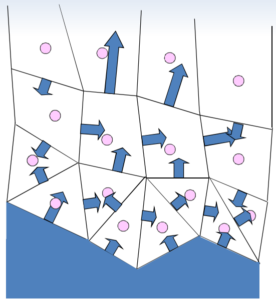
・積分形で書かれた式に対して、面積分を境界面でのフラックスの流出入の和として近似する。

・保存性を保ちやすい

・任意の形状の格子に柔軟に対応可能

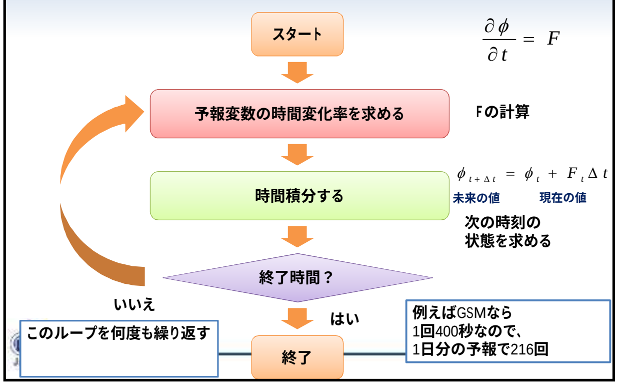


有限体積法（2）



任意の格子形状でも、境界ごとにフラックスを求めればよい。

数値予報モデルの計算の流れ



最も簡単な1次元移流方程式

- 方程式
  - 物理量 f が、速度cで、x方向に動いている

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$$

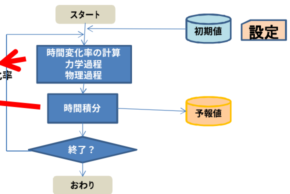
  - 大気の支配方程式にも現れる最も基本的な方程式で厳密解は簡単に求められるが、数値的にはいろいろな問題があり、工夫が必要。
  - 適当な初期値、数値計算法を用いて解いてみる

プログラム例

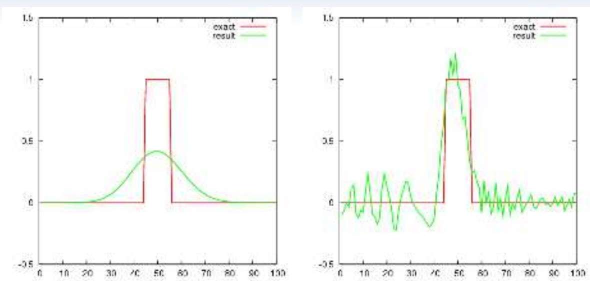
```
program adv
integer, parameter:: nx = 100 ! 格子数（問題サイズ）
real(8):: f(nx) ! 物理量の配列
real, parameter::dx = 1000.d0 ! 格子間隔（細かい方が精度は良い）
real, parameter:: dx = 1.d0 !  時間積分間隔
! 初期値設定
do I = 1, nx
      f(i) = …
end do
! 時間ループ
do it = 1, 100
      do I = 1, nx
               dfdx = -c * ( f(i+1) - f(i-1) ) / (2.*dx) ! 時間変化率
               f(i) = f(i) + dfdx * dt !
      end do
      ! 必要ならここで出力
      write(10) f
end do

stop
end program adv
```

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{f^{t+1} - f^{t}}{\Delta t} = -c\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$$



結果の例



格子数を100として領域中央に10⊿xの矩形波をおいた場合の結果。

⊿x=1000m、c=50m/s、⊿t=10とし、ちょうど1周するだけ時間積分した。

左が風上1次差分、右が中央2次差分を用いた結果。赤線が厳密解。緑線が数値解

実際の数値予報モデル

- 原理は同じ
- これが複雑になり、数十万行に達する

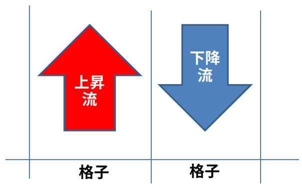
- 「パッケージ化（カプセル化、隠蔽）」により、わかりやすいプログラムが採用されつつある
- しかし、計算精度については様々な原因が絡み合っており、総合的知識が必要

領域モデルと全球モデル

- 領域モデルは見たいところを細かくシミュレーション
- 日本付近の天気予報、積乱雲・雷の発達シミュレーションなど、古くから需要があり、開発も盛ん
- 計算負荷もかかり観測データ取り扱いが複雑な全球モデルより、扱いが易しい地域モデルは、民間会社・途上国のニーズにもマッチ

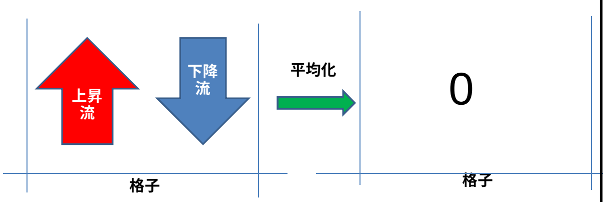
- 側面境界の影響が甚大で、結局は外側の境界値の精度に依存してしまい、予報初期にしか意味がない
- 一方、細かい初期値を得ることが非常に困難で、予報初期（立ち上がり）の精度に限界がある

格子平均によってモデルが表現するもの 高解像度のモデルでは



各格子の中で平均化しても、上昇流と下降流をそれぞれの格子が表現できる。
上昇流、下降流がそれぞれの輸送を行う。

格子平均によってモデルが表現するもの 低解像度のモデルでは



低解像度のモデルでは、上昇流と下降流が打ち消しあって、鉛直速度はゼロになってしまう。
しかし、平均値からのずれが行う輸送の効果を考えなければ、気象現象を表現できない。

高解像度の利点の例

- 鉛直輸送
- 雲量
- 地形

- データ同化

など

低解像度モデルにおける鉛直輸送

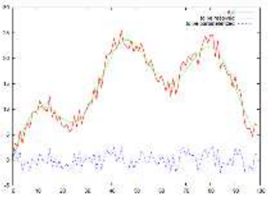
- 上昇流は大きいスケールで平均化すると、上昇流と下降流と**打ち消しあってほぼゼロ**。
  - しかし、**上昇流による運動量、熱、水蒸気の輸送は打ち消しあわず**、格子平均値に影響を及ぼす。
    - 上昇流の平均はゼロでも、輸送の効果を取り入れないといけない。
- その手法:パラメタリゼーション
  - 格子平均では表現できない格子平均からのずれによる格子平均値への効果(時間変化率)を**格子平均値から評価**する。
    - 格子平均値だけで、格子平均からのずれを"想像"するのは非常に難しい。
    - 特に対流についてはさまざまなモデル･スキームが提唱されている←パラメタリゼーションが一筋縄にいかないことの反映
    - パラメタリゼーションの不確定性がモデルの予報の**不確定性**となってしまう。

高解像度モデルにおける鉛直輸送

- 平均化するスケールが小さくなり、個々の上昇流、下降流を**格子平均で表現できる**。
  - 平均化するスケールが小さくなれば、格子平均値からのずれは小さくなる。
  - その結果、上昇流、下降流による輸送が**支配方程式の中で記述**できて、パラメタリゼーションによる**不確定性を除去できる**。
    - ただし、解像度によっては、すべての鉛直輸送を格子点の値を使って表現できるとは限らないことに注意が必要

(参考) LES(Large Eddy Simulation)

- 乱流による輸送のシミュレーション、研究分野で広く活用
- 超高解像度のモデル(格子間隔数十メートル)
- 乱流(渦)による輸送を大きなスケールのものは格子点値によって表現し、小さなスケールのものにはパラメタリゼーションを用いる。
- 現象のシミュレーションの他に、パラメタリゼーションを開発するための参照データとしても利用されている。

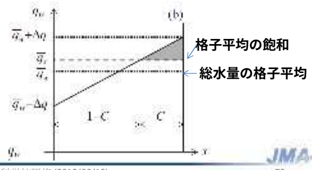


赤線:表現しようとする現象
緑線:格子点値によって解像するスケールの大きなもの
青線:パラメタリゼーションによって表現するスケールの小さいもの

低解像度モデルにおける雲

- 格子平均値では飽和に達していなくても、**格子の一部分は飽和している**(=雲が生成している)という場合がありうる。
- 格子の中を雲を占める割合:雲量
- 雲量算出も**格子平均を用いたパラメタリゼーション**

格子平均では飽和に達していないが、格子の中では一部が飽和に達している
C: 雲量



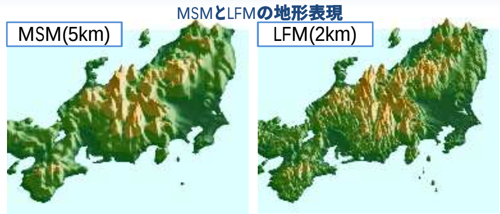
高解像度モデルにおける雲

- 格子間隔が十分に小さくて、**平均化するスケールが小さい(揺らぎが小さい)場合**には、飽和に達して雲がある格子か未飽和で雲がない格子(**雲量0 or 1**)に分ければ十分であり、雲量算出というパラメタリゼーションが不要に。
- 格子間隔2km程度ではまだまだ雲量の概念は必要。しかし、より低解像度に比べて**中間の雲量の状態の頻度は少なく**なる。

低解像度モデル	高解像度モデル	
雲量0.5	半分の領域で雲量0	半分の領域で雲量1

解像度による地形の違い

MSMとLFMの地形表現



地形が高解像度になると

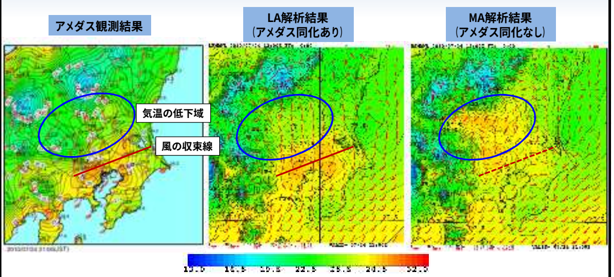
- 地形が大きく関係している現象の表現が向上
  - 例)対流が発生するためには、成層状態が不安定であると同時に、**浮力を持つ高度まで気塊が持ち上げられる必要**がある。
    - 持ち上げる強制力: 収束による上昇、混合層の発達、**地形による上昇**など
    - 地形がより現実的になれば、**このような強制力をよく表現**できるようになり、**対流の発生を予測しやすくなる**。
  - 例)山岳波
    - 安定成層の中で、**大気が地形によって持ち上げられること**によって生成。
  - 例)地形の影響を反映した風の流れ

データ同化の観点から

- データ同化で用いる観測データは、そのモデルの解像度に対して**代表性をもった値**であることが必要
  - 地上の観測データは地形や周りの環境の影響をうけやすい
    - GSM, MSMでは地上の観測データは、局所性が小さいと考えられる気圧だけをデータ同化に使っている。
  - 水平解像度が細かくなれば、モデルで地形の影響などが表現しうるので、**地上観測データのような局所性が強いものも同化が可能**になり、より多くの観測の情報を取り入れられる。

局地解析におけるアメダス同化の効果（対メソ解析）

地上収束線が関東地方を南下した事例（2010年7月24日12UTC）の地上気温・風



観測結果に見られる風の収束線および気温の低下域が、
アメダスデータを同化しているLAでは表現されているが、同化していないMAでは不明瞭。

まとめ:高解像度モデルの持つ可能性

- 水平格子間隔を小さくすると、**より細かなスケールの空間的・時間的変化を表現**できる。
  - 平均化するスケールが小さくなるから
- 低解像度モデルにおけるパラメタリゼーションによる効果を、**格子点の値を使って支配方程式で表現しうる**ようになり、モデルの予報結果のもつ**不確定性を小さくできる**。
  - しかし、格子平均からのずれの効果を完全に無視できるわけではなく、**解像度に応じたモデル開発が必要**であり、取り組んでいるところである。
- 地形が細かくなることで**地形に強く影響を受ける現象**を表現しやすくなる。
- **観測データの代表性**を求められるデータ同化では、注目するスケールが小さくなることで、**局所性の強い地上観測データでも同化**することが可能になって、より多くの観測データの情報を取り入れることができる。