

## 粉体の運動論モデルと流体力学的性質

### 第 28 回 Grain Formation Workshop, 平成 22 年度銀河のダスト研究会

矢野良輔、鈴木宏二郎

東京大学大学院先端エネルギー工学専攻

Sept. 3, 2010

## 内容

- 粉体（ダスト）を”流体”として考える上で、運動論的手法は重要となる．

## 内容

- 粉体（ダスト）を”流体”として考える上で、運動論的手法は重要となる．
- 通常、運動論的手法が適応できる領域は、希薄な粉体に限定される．濃い粉体の運動論は、未着手．

## 内容

- 粉体（ダスト）を”流体”として考える上で、運動論的手法は重要となる．
- 通常、運動論的手法が適応できる領域は、希薄な粉体に限定される．濃い粉体の運動論は、未着手．
- 希薄な粉体の運動は、非弾性ボルツマン方程式で記述される．

## 内容

- 粉体（ダスト）を”流体”として考える上で、運動論的手法は重要となる．
- 通常、運動論的手法が適応できる領域は、希薄な粉体に限定される．濃い粉体の運動論は、未着手．
- 希薄な粉体の運動は、非弾性ボルツマン方程式で記述される．
- 粉体の運動論モデルは、Brey ら (PRE, 1998) により幾つか提案されているが、流れ場ある下で、DSMC 法と比較していないために実用性は不明．弾性極限で、BGK モデルに漸近するので不十分．

## 内容

- 粉体（ダスト）を”流体”として考える上で、運動論的手法は重要となる．
- 通常、運動論的手法が適応できる領域は、希薄な粉体に限定される．濃い粉体の運動論は、未着手．
- 希薄な粉体の運動は、非弾性ボルツマン方程式で記述される．
- 粉体の運動論モデルは、Brey ら (PRE, 1998) により幾つか提案されているが、流れ場ある下で、DSMC 法と比較していないために実用性は不明．弾性極限で、BGK モデルに漸近するので不十分．
- Brey らのモデルとは別に、14 モーメント方程式から、BGK(Bhatnagar-Gross-Krook) 型の運動論モデルを提案し Brey らのモデルと比較する．

## はじめに

粉体は、非弾性衝突をすることからエントロピー開放系の物理として、昨今、多くの研究がなされている。工学的応用から理学的関心に至るまでその適応範囲は広い。

粉体はその大きさが、流れ場のスケールに対して無視できない場合も多く、そのような場合は、**体積粘性**などの効果が出現し、通常の流体の取り扱いとは少々異なる。ここでは、体積粘性が余り問題とならないようなできる限り薄い粉体を考える。即ち、Enskog 方程式でなく、**Boltzmann 方程式を適応できる範囲の話に限定する**。粉体同士の相互作用は、衝突のみとし、粉体の表面は極めて滑らかゆえに、粉体の回転運動は無視する。また、反発係数は、相対速度に寄らず一定である。

**運動論方程式とは、メソスケールの粒子運動を記述した方程式で、ここでは、Boltzmann 方程式の簡易方程式を指す事とする。**

**運動論方程式を考える意義は、数学的性質が明確な方程式を使う事で現象を説明しやすくする事やモンテカルロ法に比べて数値揺らぎが無い事から、非定常な問題を解くのに適している。特に、揺らぎのような物を扱う際は、数値揺らぎと熱的揺らぎを区別せねばならず、モンテカルロ法による方法は、ある意味破綻する。**

## 粉体の運動論方程式

粉体は、非弾性衝突するので、ボルツマン方程式の衝突項は、非弾性衝突の効果を入れて書き換えなくてはならない。(ε は、反発係数)

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} + v^i \frac{\partial f(v)}{\partial x^i} = \int \left\{ \frac{1}{\epsilon^2} f(v') f(v'_1) - f(v) f(v_1) \right\} g \sigma \sin \chi d\chi d\epsilon dv_1^3,$$

空間一様な系では、温度のみの関数となり、衝突項は次に書かれる。(ζ は冷却率)

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial v^i f}{\partial v^i} \cdot \left( \rightarrow \frac{dT}{dt} = -\zeta T \right)$$

Brey らは、この性質から次のような運動論モデルを提案している。

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} + v^i \frac{\partial f(v)}{\partial x^i} = \underbrace{v_{el} (f^{(0)}(T) - f)}_{elastic} + \underbrace{\frac{1}{2} \zeta \frac{\partial C^i f}{\partial v^i}}_{inelastic}$$

$f^{(0)}$  は、Maxwell-Boltzmann 分布ここで、Brey らのモデルは、ボルツマン方程式から直接導出したモデルではない事に注意されたい。非平衡条件下ではどうか？

非弾性衝突ボルツマン方程式は、次に書きなおすことができる。

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} + v^i \frac{\partial f(v)}{\partial x^i} = \psi(\mathbf{G} - f), \quad \wedge \psi = \int f(v_1) g \sigma \sin \chi d\chi d\epsilon dv_1,$$

$\mathbf{G}$  を冷却率、輸送係数が合うように、14 モーメントで展開する。

$$\mathbf{G} = \mathbf{f}_{13}^+ = \left( \mathcal{A}^{(0)} + \mathcal{A}_i^{(1)} H_i^{(1)} + \mathcal{A}_{ij}^{(2)} H_{ij}^{(2)} + \mathcal{A}_i^{(3)} H_i^{(3)} + \frac{1}{8} \mathbf{a}_{NE} H^{(4)} \right) f_M,$$

13 個の未定パラメタ  $\mathcal{A}_i^{(n)}$  は、非弾性ボルツマン方程式から導かれる Grad の 13 モーメント方程式を満たすように決定される。

Mass conservation:

$$\int_{\gamma^3} \psi(\mathbf{f}_{13}^+ - f) dv = 0,$$

Momentum conservation:

$$\int_{\gamma^3} \mathbf{C}_i \psi(\mathbf{f}_{13}^+ - f) dv = 0,$$

Equation of pressure deviator:

$$\int_{\gamma^3} \mathbf{C}_i \mathbf{C}_j \psi(\mathbf{f}_{13}^+ - f) dv = -\nu \mathbf{p}_{ij} + \delta_{ij} n \nu \mathbf{a}^{(2)} T,$$

Equation of heat flux:

$$\int_{\gamma^3} \frac{\mathbf{C}_i \mathbf{C}^2}{2} \psi(\mathbf{f}_{13}^+ - f) dv = \nu (\varpi - 1) \mathbf{q}_i,$$

総括：

- Brey らのモデルは、非弾性衝突部分の取り扱いに於いて、非平衡系での正しい取り扱いが出来ているか不明である．少なくとも 13 モーメントの挙動は、合っていない．一方で、Yano らのモデルでは、13 モーメントの挙動は、ボルツマン方程式によるものと一致するものの、それ以上のモーメントの挙動に関しては、冷却の効果が考慮できていない．一方で、Brey らのモデルは、13 モーメント以上のモーメントにもある程度冷却の効果が反映されていると期待できる．また、分布関数の正值性が常に保証される．一方で、Yano らのモデルでは、正值性が保証されない．

→ 数値計算で検証してみる．

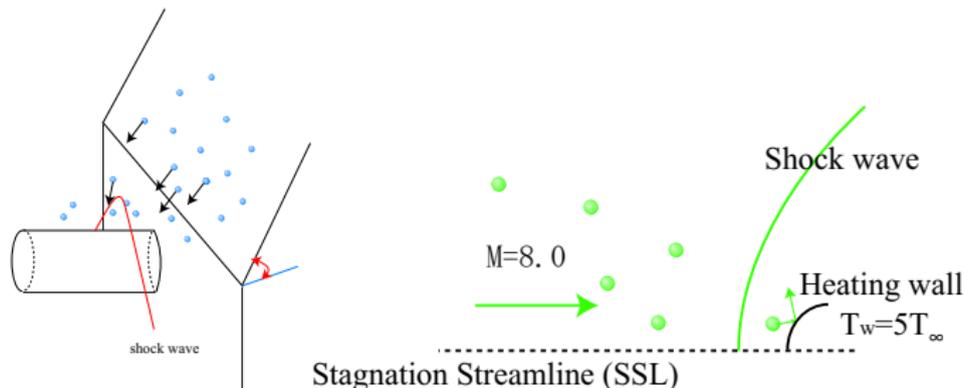
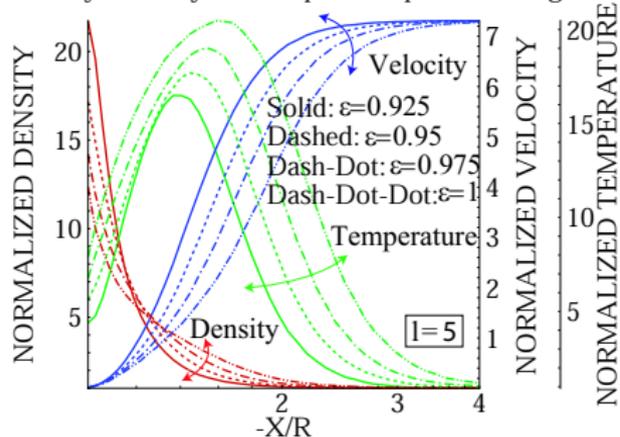


Figure: 円柱周りに形成される衝撃波の実験（左図）Y. Amarouchene et al., Phys. Fluids, 18, 031707 (2006)、円柱周りに計算される衝撃波の解析（右図）

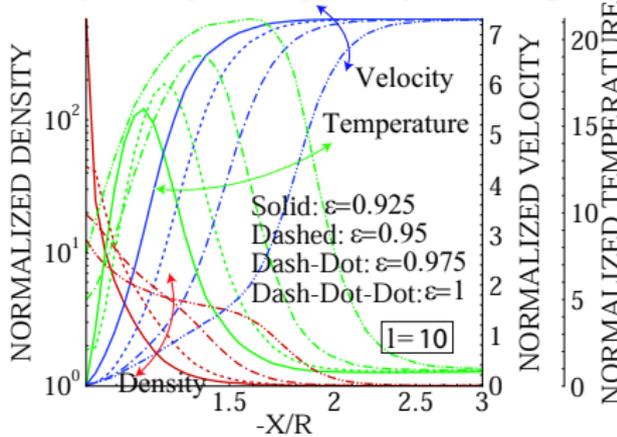
## 反発係数 ( $\epsilon$ ) による流れ場の変化 ~ DSMC 法の結果

- 反発係数は、 $\epsilon = 1.0, 0.975, 0.95, 0.925$  と変化させる .
- $\text{Kn}=0.1$  として、一様流のマッハ数は、 $M = 8$  とする .
- 逆べき分子として、 $F = -\phi/r^l$  として、 $l = 5, 10$  を考える .  $\kappa = 5$  は、マクスウェル分子と呼ばれる .

Density, velocity and temperature profiles along SSL



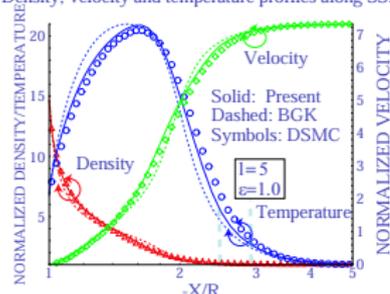
Density, velocity and temperature profiles along SSL



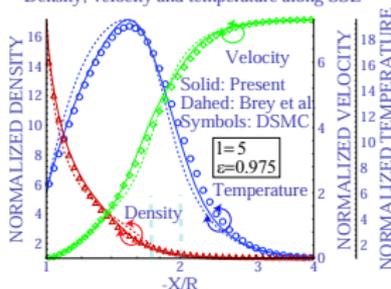
- 外部からエネルギーを与え続けるので、定常状態が実現できる .
- 衝撃波背後の温度は、反発係数を小さくすると減少する .
- 衝撃波離脱距離は、反発係数を小さくすると減少する .
- 壁面で加熱しているなので、 $\kappa = 10 \wedge \epsilon = 0.95$  では、壁面付近で再加熱領域が出来るが、 $\kappa = 10 \wedge \epsilon = 0.925$  では、壁面付近で、温度は 0.12 に漸近する .

# $\epsilon = 0.95, 0.975$ の淀み流線上の密度、速度、温度分布 ~ 運動論方程式の結果

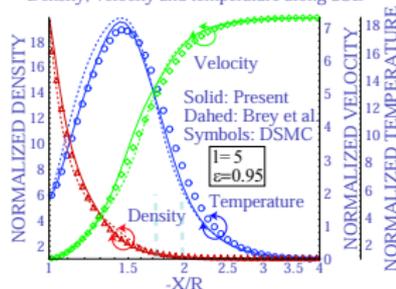
Density, velocity and temperature profiles along SSL



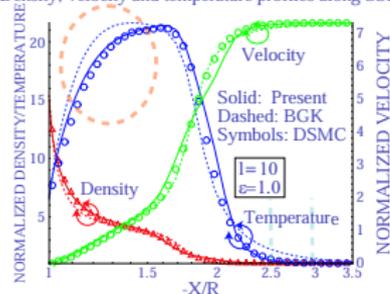
Density, velocity and temperature profiles along SSL



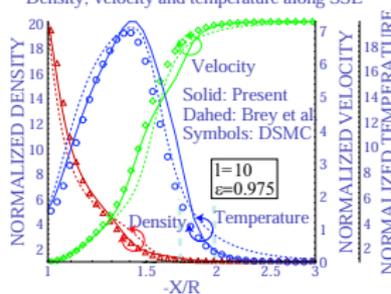
Density, velocity and temperature profiles along SSL



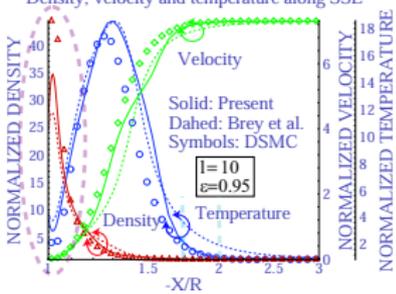
Density, velocity and temperature profiles along SSL



Density, velocity and temperature profiles along SSL

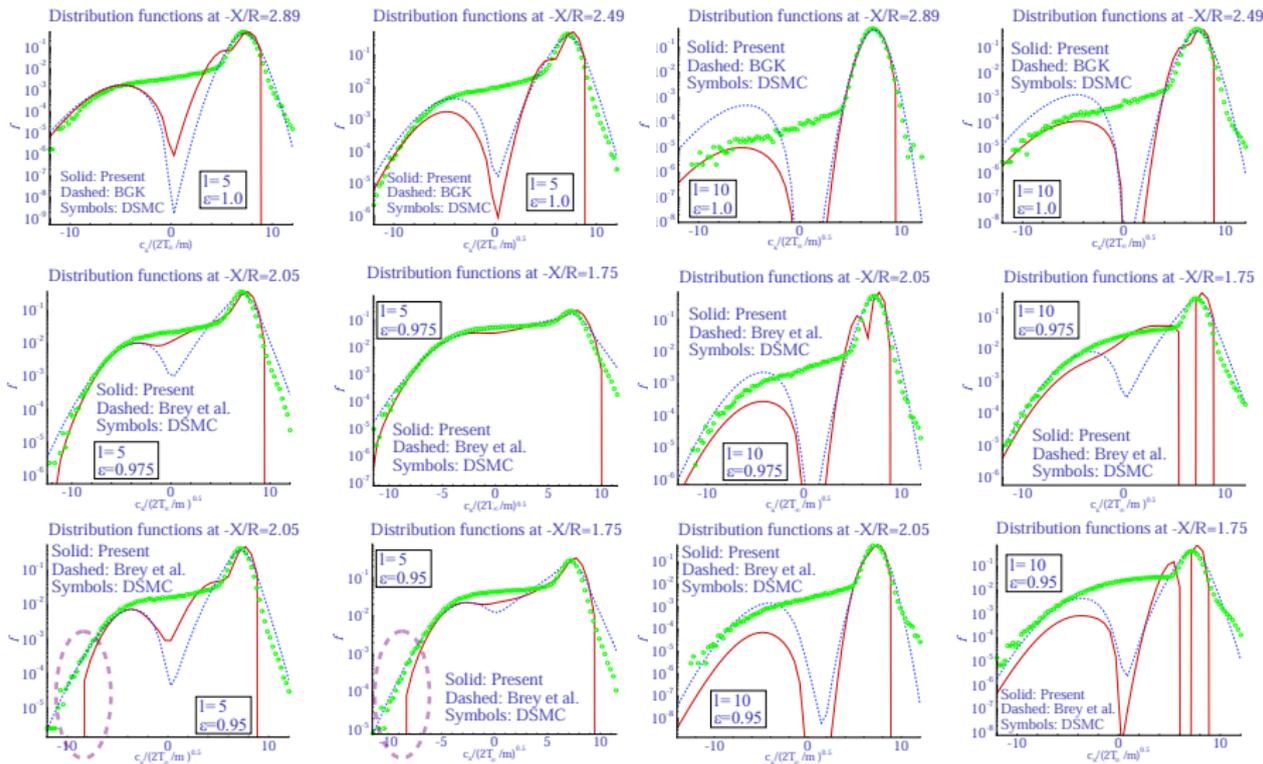


Density, velocity and temperature profiles along SSL



Maxwell 分子 ( $l = 5$ ) では、提案したモデルと DSMC 法による結果は良く合う。一方で、 $l = 10$  では、 $\epsilon = 0.95$  で壁面や衝撃波背後の温度が合わない。

# 淀み流線上の分布関数



## 議論

- ◆ BGK 型の運動論モデルを提案し、弱非弾性領域においてその性質を解析した .
- ◆ 非平衡領域の冷却率への効果が、速度依存型の衝突頻度を持つ逆べき分子の計算から確認された .
- ◆ 分布関数の正值性を満たさないために、反発係数を小さくすると分布関数の負の速度テイルに分布関数が負になる領域が確認された .
- ◆ 非弾性ボルツマン方程式における生成項の効果は、反発係数を下げると、負の速度テイルが弾性衝突の場合に比べて、衝撃波隆起位置で、過剰分布となる事が確認された .
- ◆ 今後、シェア流などに適応して、非弾性衝突による流れの不安定性の解析をする予定である .