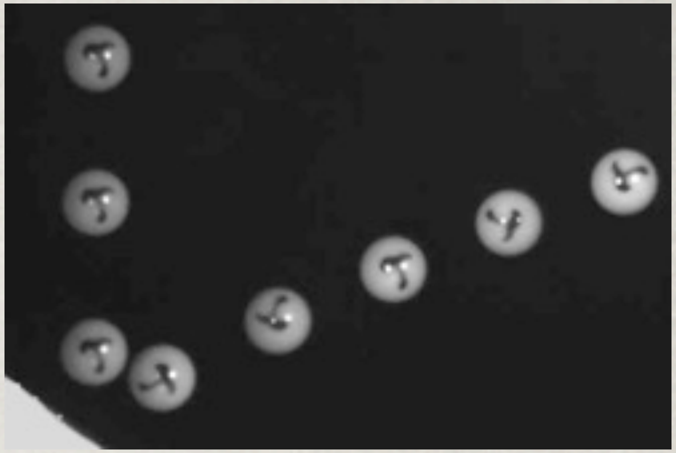
石の水切りのSPHシミュレーション

仙台高専機械システム工学科
永弘進一郎

様々な衝突の研究

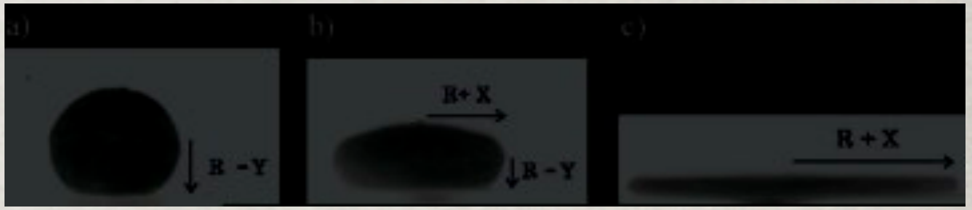
弾性球と弾性壁の斜め衝突

H. Kuninaka and H. Hayakawa
Phys. Rev. Lett. **93**, 154301 (2004)
M. Y. Louge & E. Adams
Phys. Rev. E **65**, 021303 (2002)



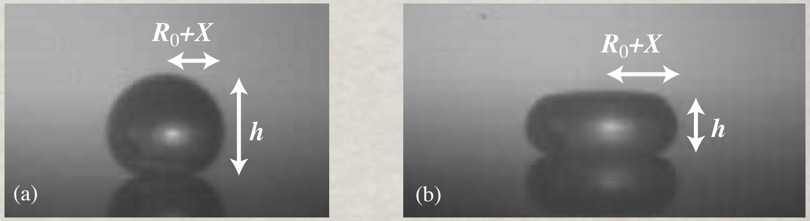
弾性ゲルと壁の衝突

Y.Tanaka et. al.
Europhys. Lett. **63**, 146 (2003)



小さな液滴と壁の衝突

K. Okumura et. al.
Europhys. Lett. **62**, 237 (2003)



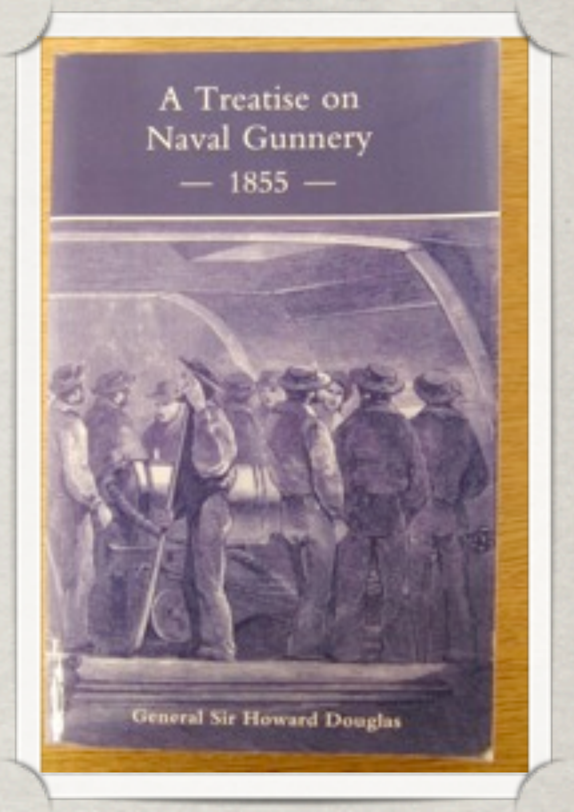
流体表面と物体の衝突

J. W. Glasheen and T. A. McMahon,
Nature, **380** (1996)

C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet.
Nature, **427** (2004)

物体と水面の斜め衝突：実験

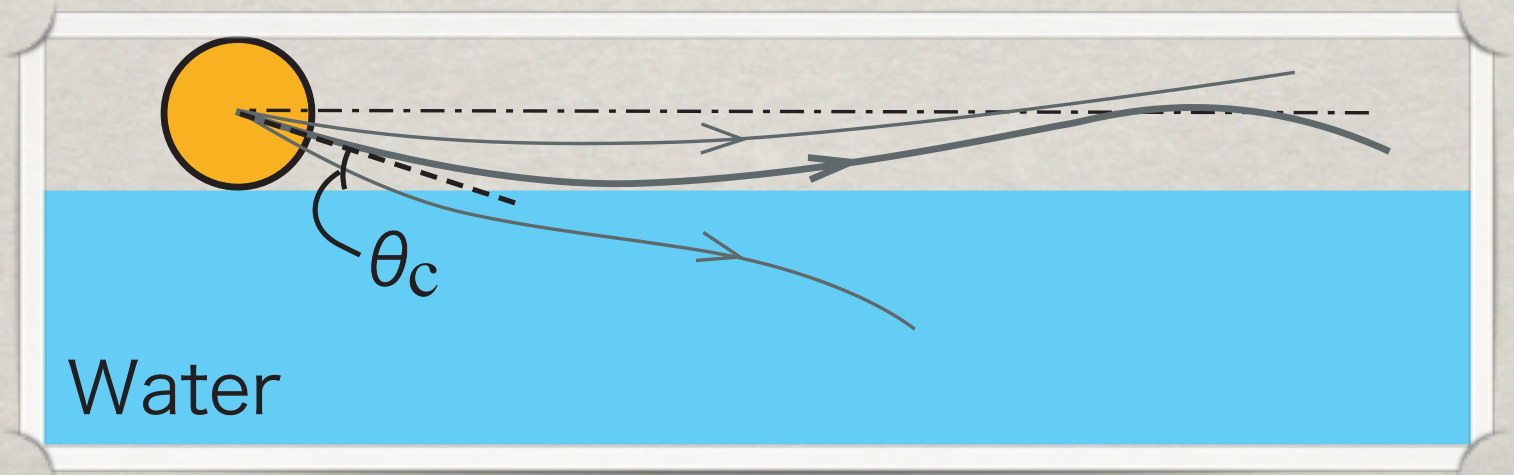
Weight[Cwt.]	distance [Yards]	Number of ricochet
84	2850	16
65	2900	32



反発の臨界角：

$$\theta_c = 18/\sqrt{\sigma}$$

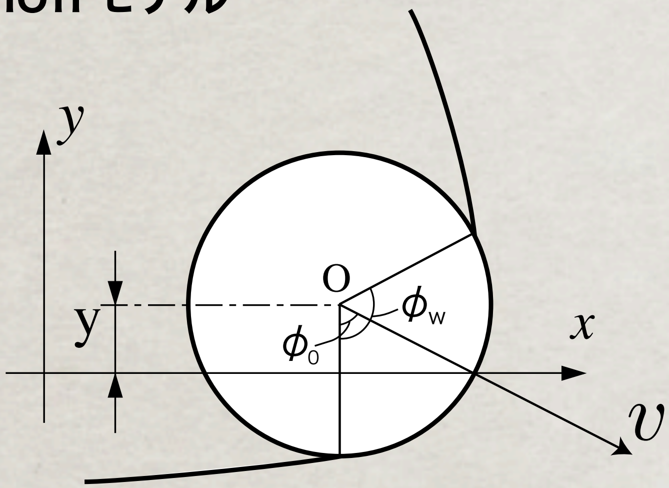
$$\sigma = \frac{\text{物体の密度}}{\text{流体の密度}}$$

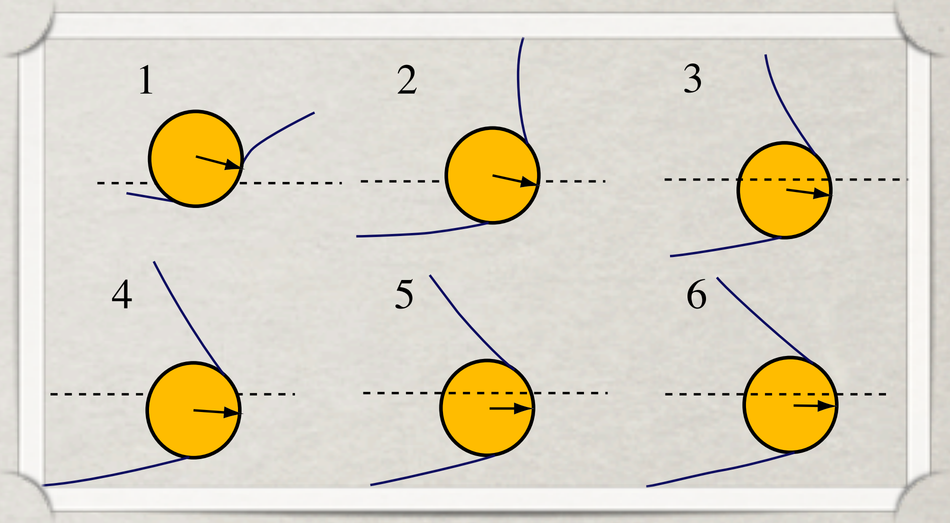


円柱衝突の理論

G. Birkhoff et. al. (1944)
W. Johnson & S. R. Reid (1975)
I. M. Hutchings (1976)

Birkhoffモデル



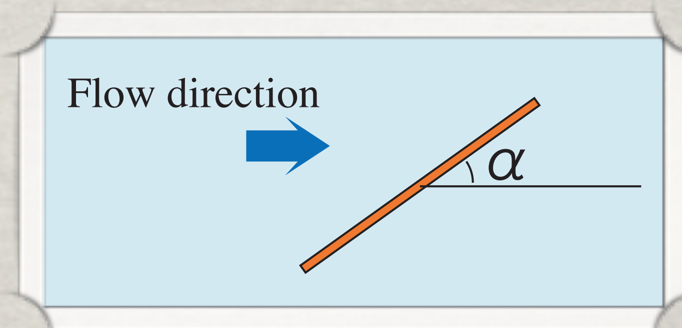


E. G. Richardson, *Proc. Phys. Soc. London, Sect. A* **61** (1948)

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \int_{\text{surface}} p_n dS$$

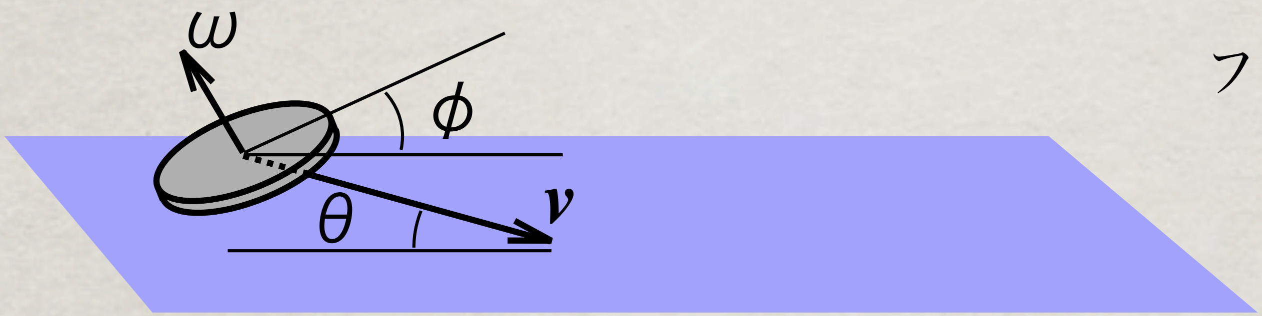
$$p_n = \frac{\pi \sin\alpha}{4 + \pi \sin\alpha}\rho v^2$$

(Rayleighの式)



$$\theta_c = 17.8/\sqrt{\sigma}$$

物体と水面の斜め衝突：実験（2）



フルード数：

$$F = \frac{v^2}{g\ell} \sim 1$$

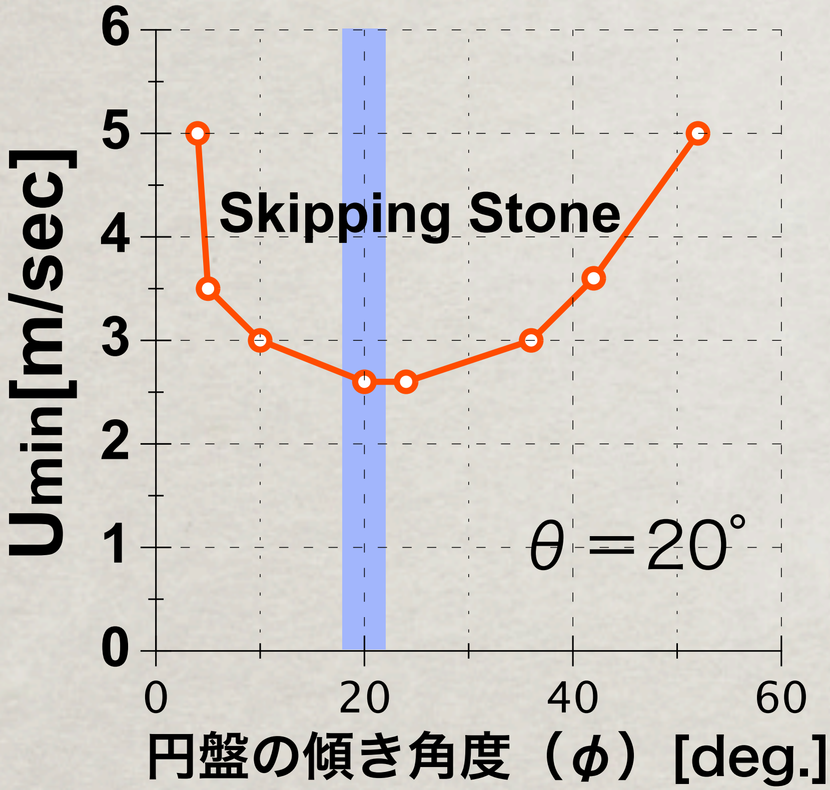
円板（石）に十分大きい回転を加えて水面へ衝突させる
→ $\boldsymbol{\phi}$ はほとんど変化しない。

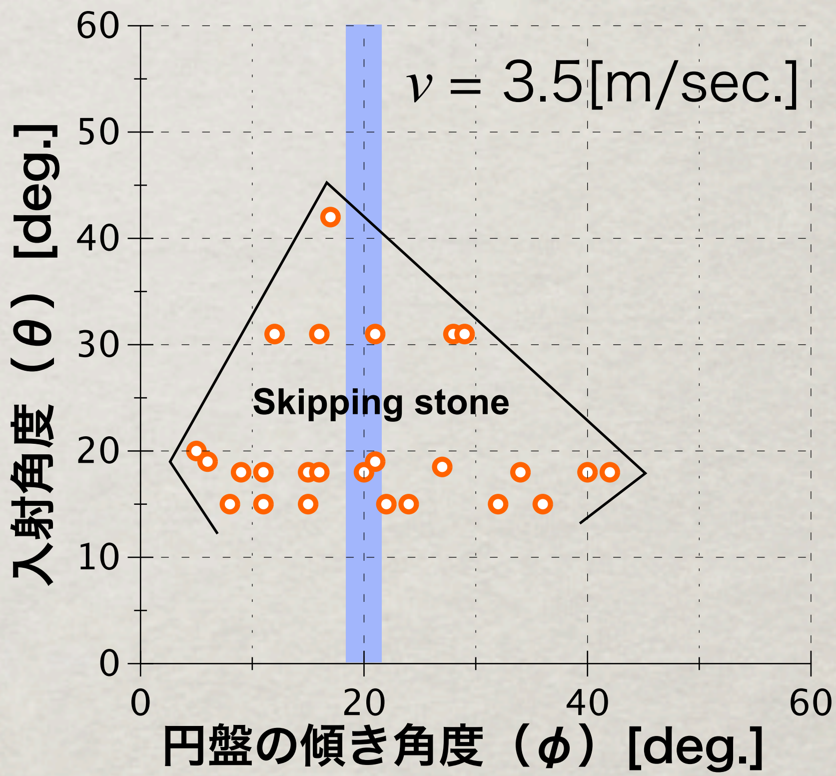
初期条件:
入射角度 θ
円板の水面に対する迎え角度 ϕ
衝突初期速度 $\boldsymbol{v}_0$

円板の半径：5 [cm], 入射速度 $\sim$ 3 [m/sec.]

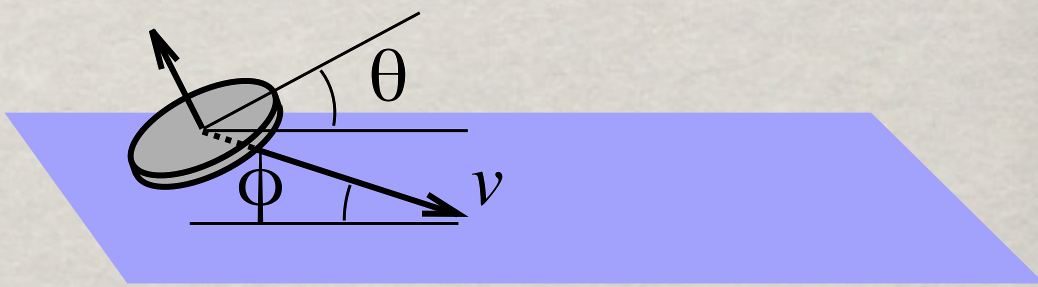
C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet. *Nature,* **427** (2004)

石の水切りの実験





"Magic Angle" $\phi_m \sim 20°$



C. Clanet, F. Hersen and L. Bocquet. *Nature,* **427** (2004)

発表の項目

1, 数値計算手法 –SPH法

2, 水面と円柱の２次元衝突シミュレーション

円柱・流体表面の衝突ショミュレーション。反発のベキ則と比較を行い，SPH法の衝突問題への妥当性と問題点を検証。

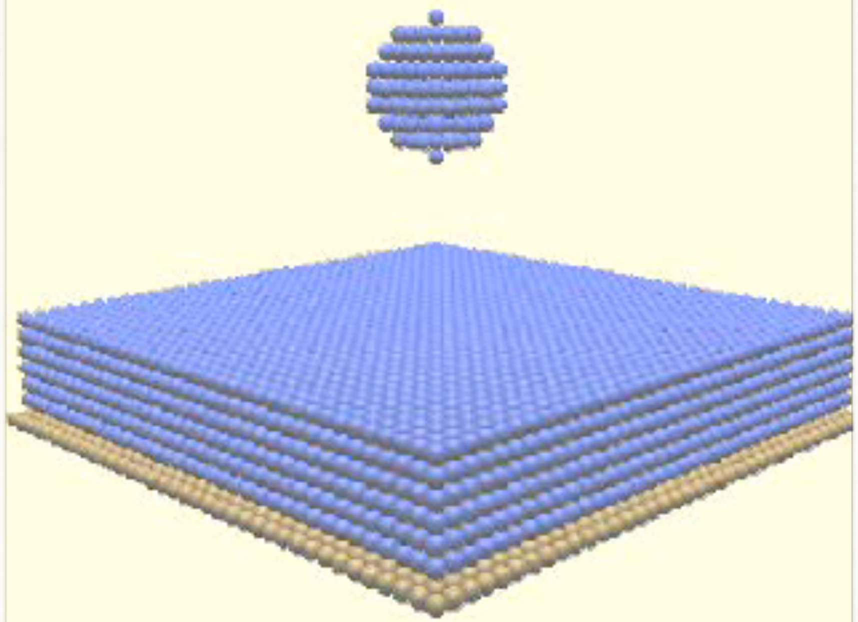
3, 水面と円板の３次元衝突とモデル解析

円板と水面の衝突の３次元ショミュレーション。
実験結果の再現。数値解析より得られた結果を元に，円板が受ける力の性質を調べ，衝突を単純化したモデルを解析する。

4, 結論、今後の課題

1，数値計算手法 –SPH法

計算例：液滴と水面の衝突



自由表面を扱う数値計算手法

Lagrange描像に基づく手法

- SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法
- MPS(Moving Particle Semi-implicit) 法

  非圧縮性を保証した粒子法。

Euler描像に基づく手法

- CIP(Cubic Interpolated Propagation)法
- Level-set法

→ 衝突を扱う都合上，運動量やエネルギーの保存が保証されるスキームが望ましい　　　SPH法

SPH法 (1)

流体の密度ρの補間$<\rho>$：

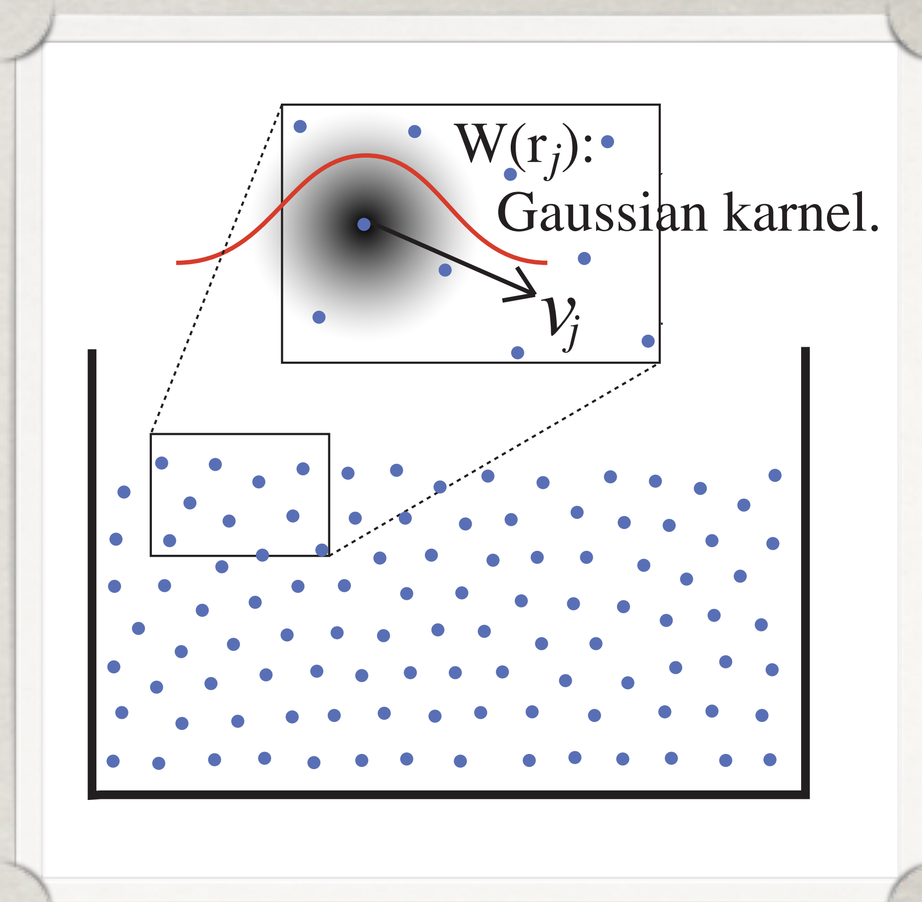
$$\langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}) = \sum_j mW(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

これを用いて，任意の物理量Aを

$$\langle A\rangle(\boldsymbol{r}) = \sum_j \frac{m}{\langle\rho\rangle_j} A_j W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\langle\nabla A\rangle(\boldsymbol{r}) = \sum_j \frac{m}{\langle\rho\rangle_j} A_j \nabla W(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j)$$

$$\langle\rho\rangle_j \equiv \langle\rho\rangle(\boldsymbol{r}_j)$$



圧力を決定する状態方程式：$p_i = \begin{cases} c^2\rho_0\left(\dfrac{\langle\rho\rangle_i}{\rho_0}-1\right) & \langle\rho\rangle_i \geqq \rho_0 \\ = 0 & \langle\rho\rangle_i < \rho_0 \end{cases}$

SPH法 (2)

Navier-Stokes方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \left(\frac{\zeta}{\rho}+\nu/3\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

$$\langle A\rangle(\boldsymbol{r}) = \sum_j \frac{m}{\langle\rho\rangle_j} A_j W(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j)$$

に基づく補間の手続き

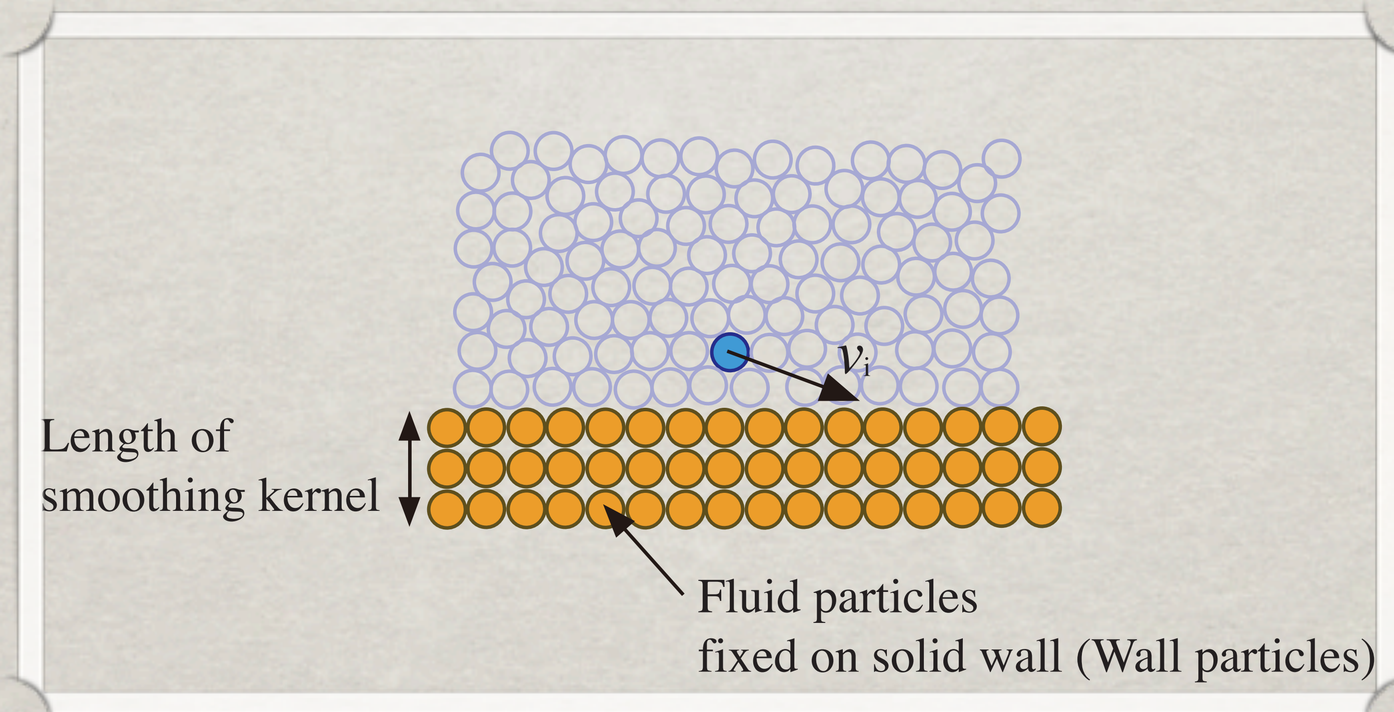
SPHの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\langle \boldsymbol{u}\rangle_i = -\sum_j \frac{m_b}{\rho_i\rho_j}\left\{p_i+p_j-\nu\xi\frac{\boldsymbol{u}_{ij}\cdot\boldsymbol{r}_{ij}}{r_{ij}^2}\right\}\nabla_i W_{ij}$$

斥力相互作用する粒子系の運動方程式

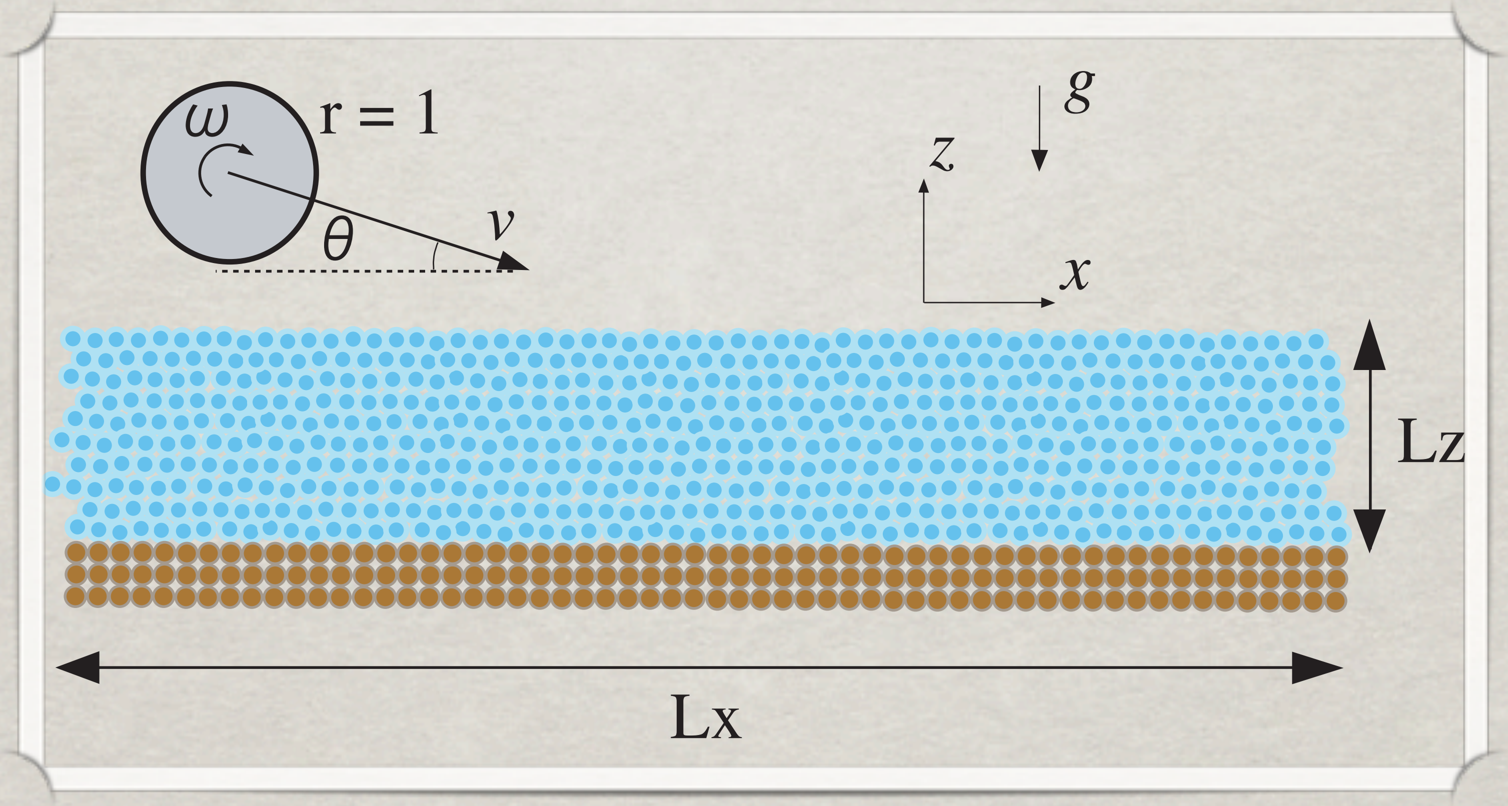
SPH法 (3) – 境界条件

固体の表面に粘性によって固定された流体粒子を仮定。
固定された粒子の受ける力の総和から壁の受ける力を
計算できる。



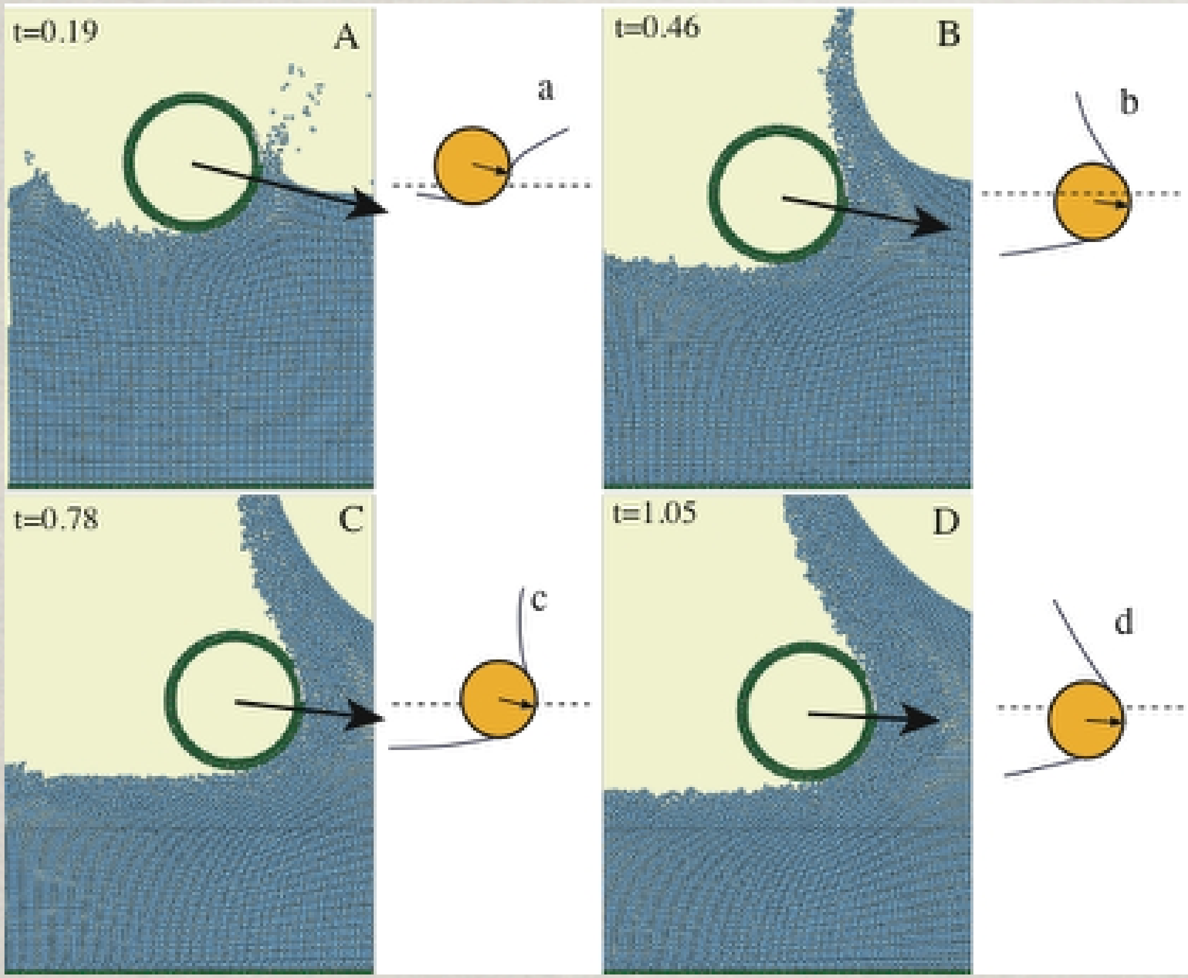
2, 水面と円柱の２次元衝突シミュレーション

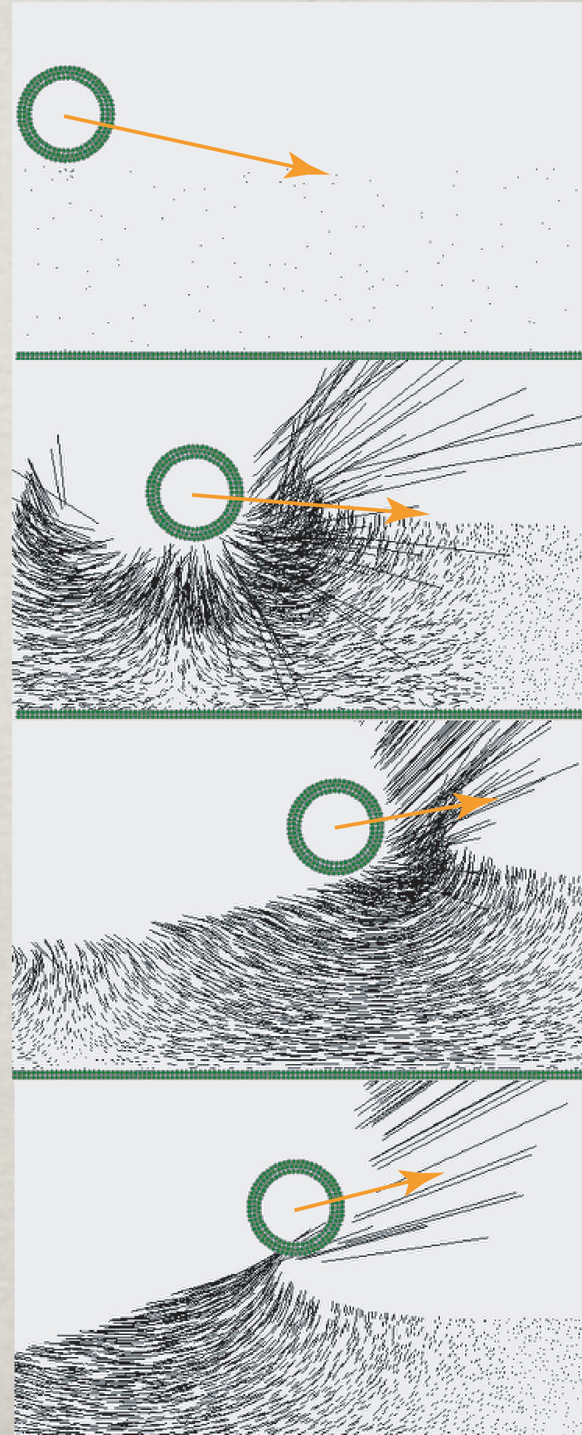
円柱と水面の斜め衝突



円柱と水面の衝突

ー衝突の様子と速度プロファイル



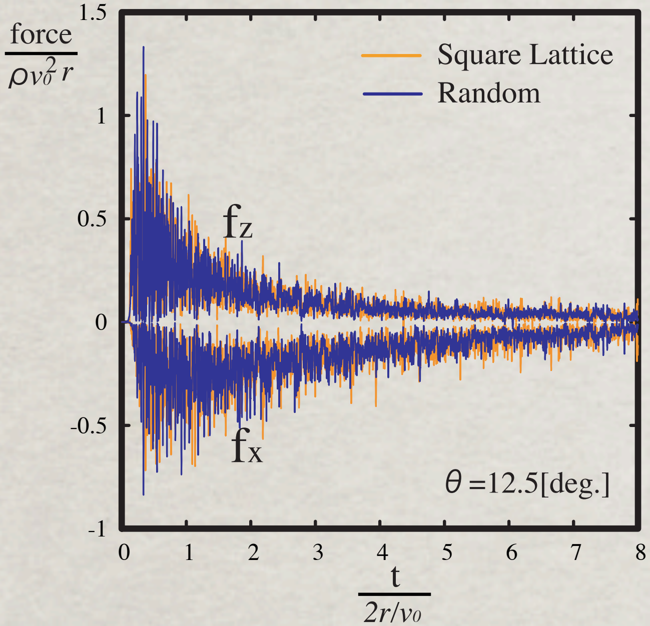


上図a-d; E. G. Richardson,

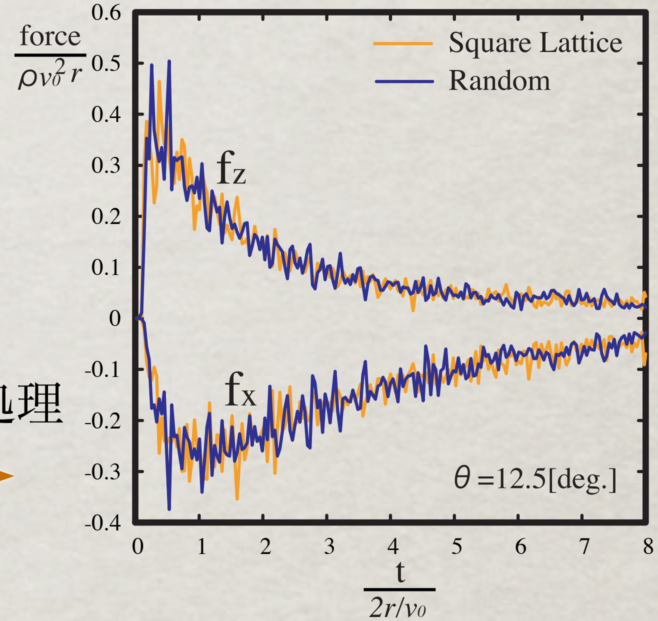
Proc. Phys. Soc. London, Sect. A **61** (1948)より引用

斜め衝突の間に円柱が受ける力

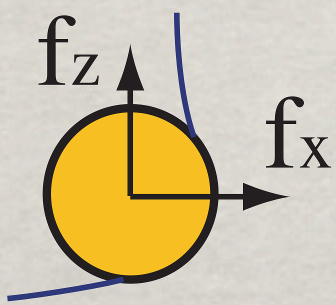
- **粒子の初期配置の影響**：粒子の配置を正方格子とランダム配置に選んだ二つの結果を比較

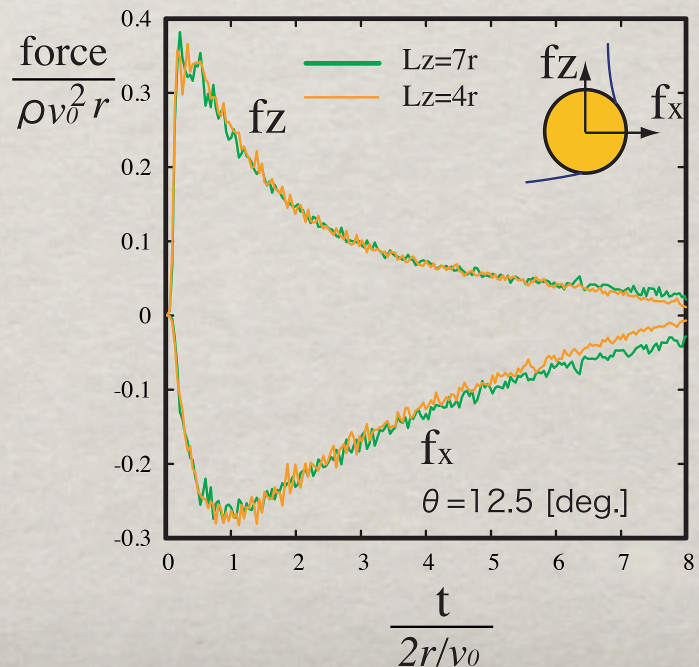


T=r/cで
時間平均処理



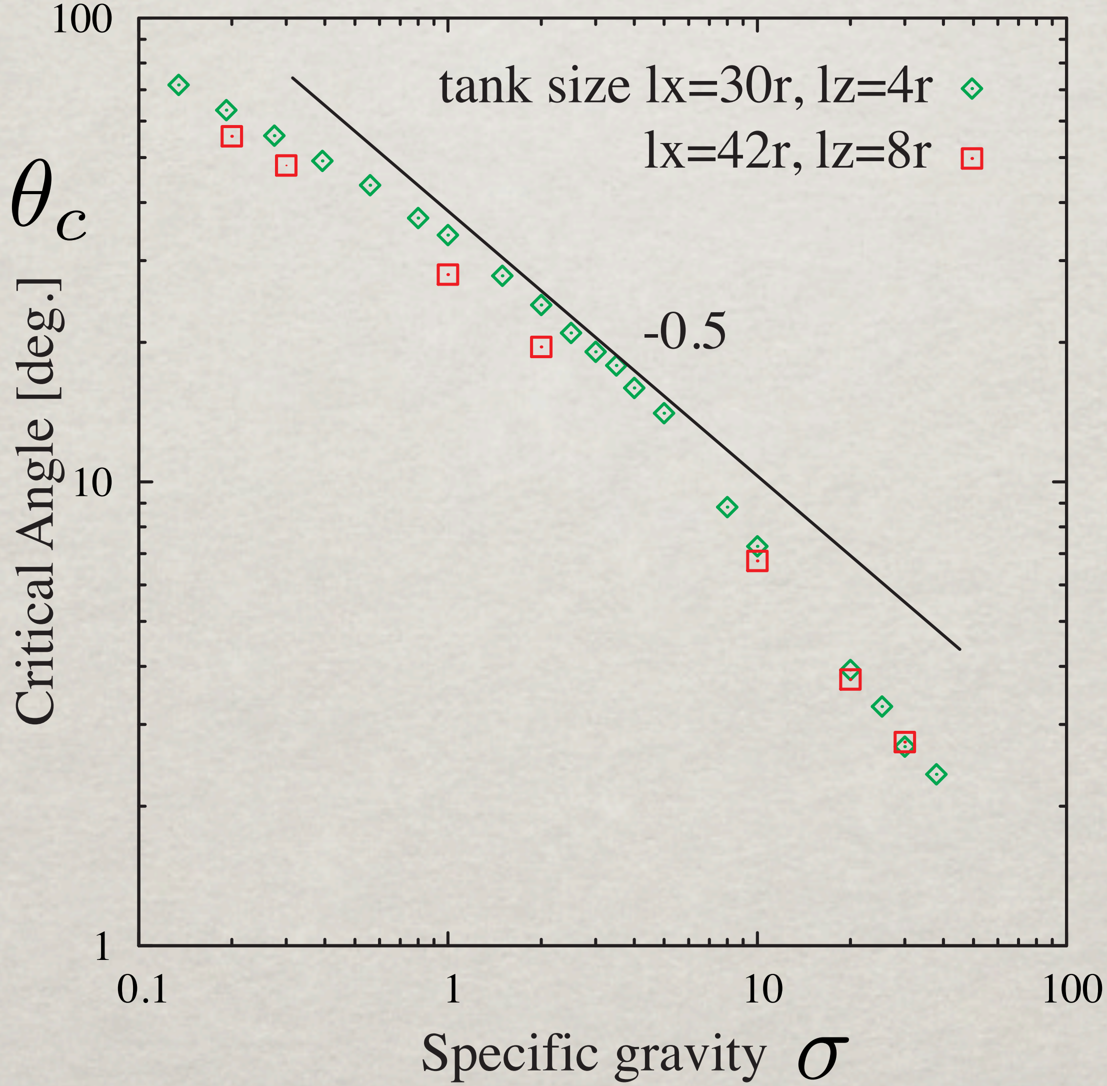
- **境界(底面)の影響**：深さの異なる水槽用いたシミュレーションの結果





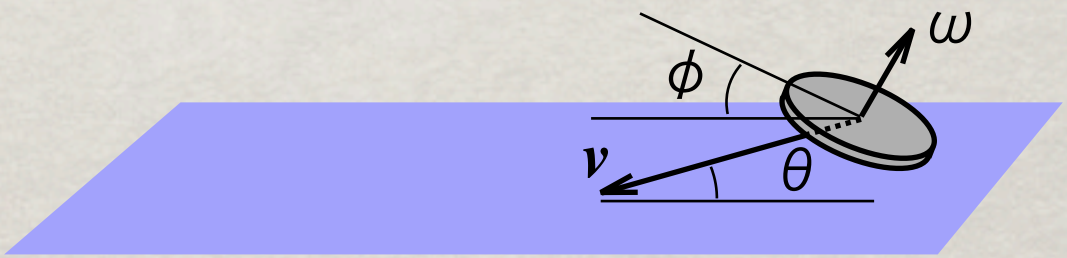
反発の臨界角度の再現性

$$\theta_c = 18/\sqrt{\sigma}$$



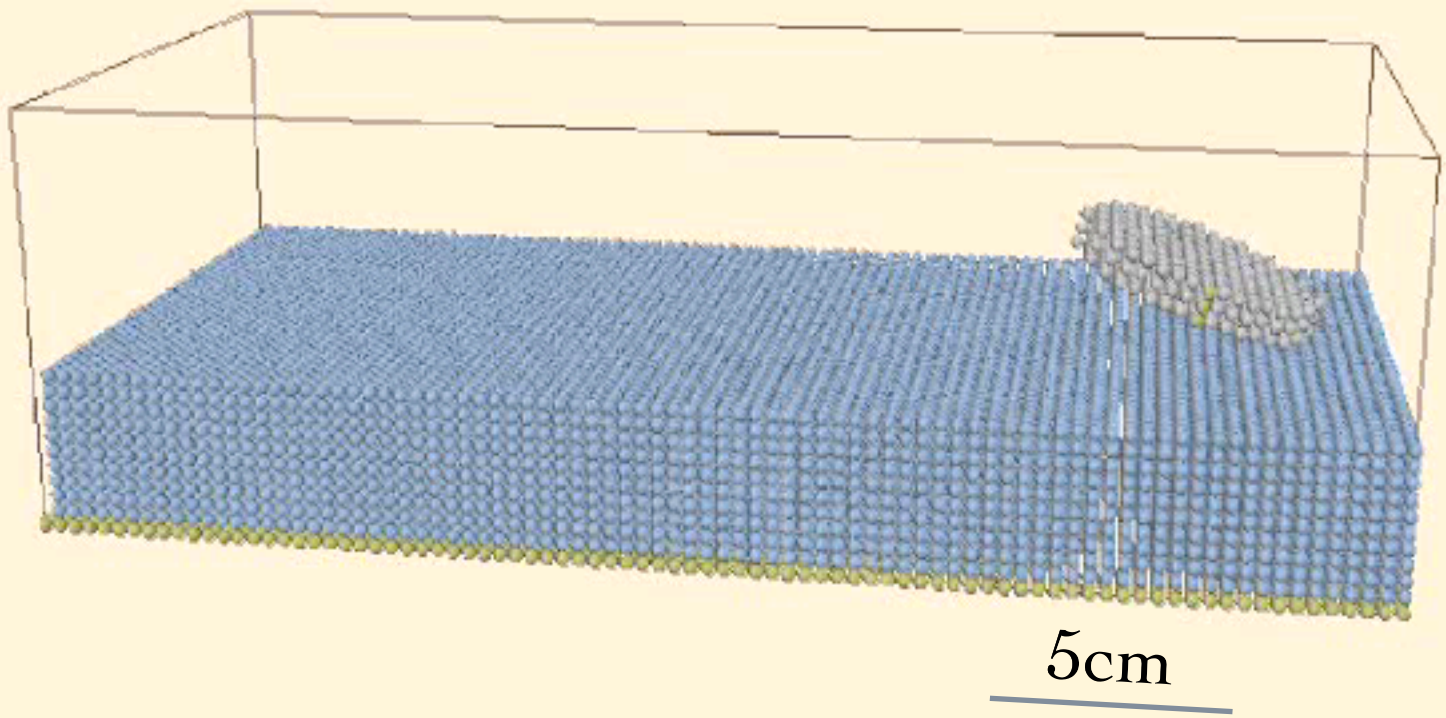
3, 水面と円板の３次元衝突とモデル解析

円板と水面の斜め衝突



水面と円板の衝突の様子１

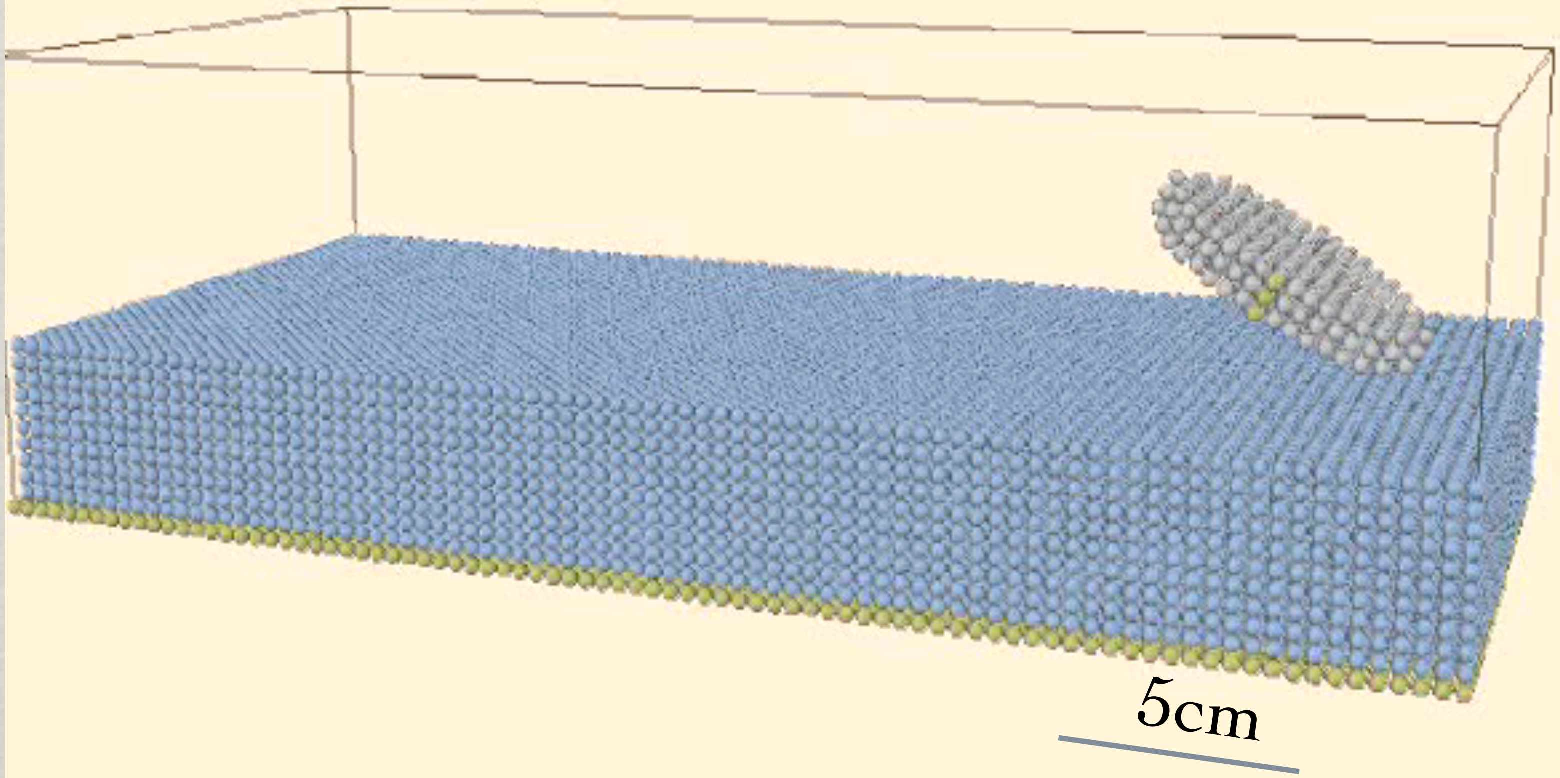
ー円板が回転しながら衝突する場合



$\theta = 12.5^\circ,\ \ \phi = 20^\circ,\ \ \omega = 60[\text{rounds/sec.}]$

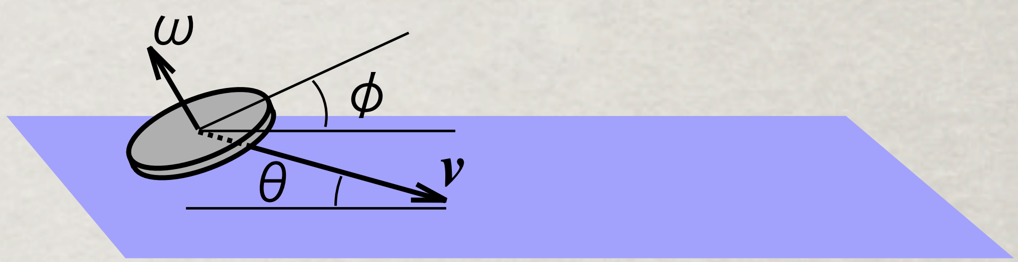
水面と円板の衝突の様子２

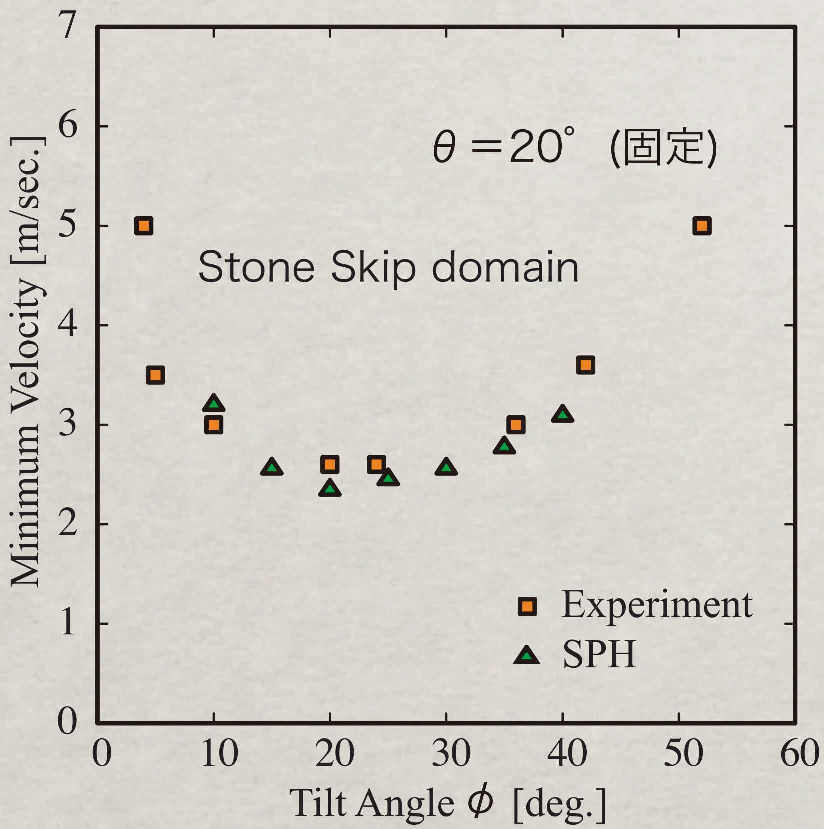
ー円板に回転が無い場合

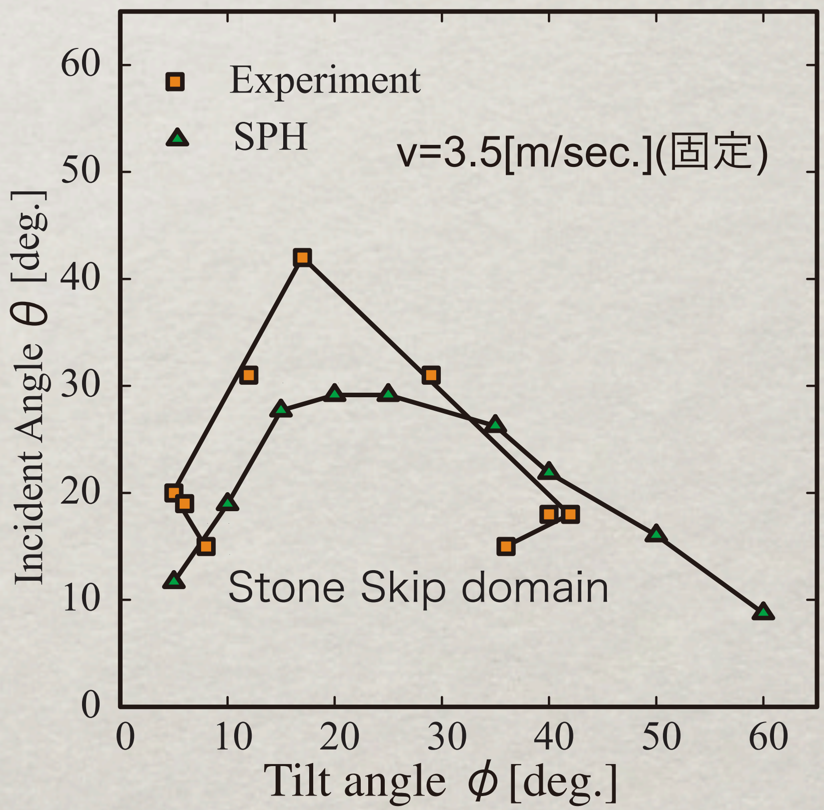


$\theta = 12.5^\circ,\ \phi = 20^\circ,\ \omega = 0[\mathrm{rounds/sec.}]$

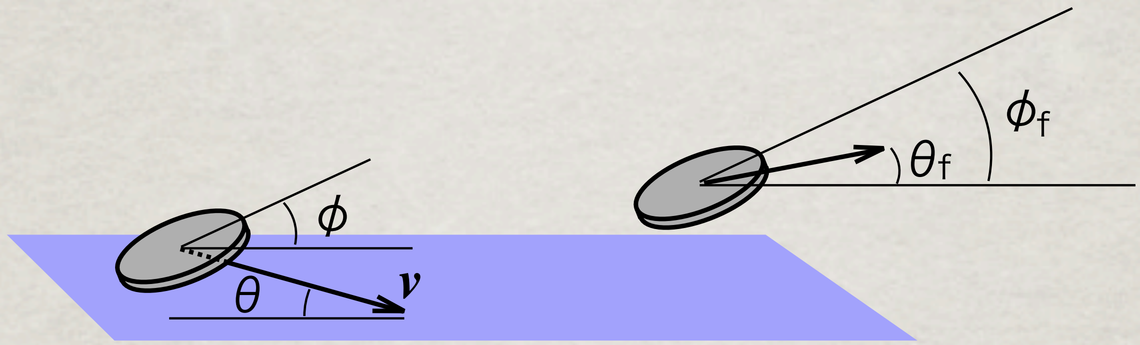
反発条件の実験との比較



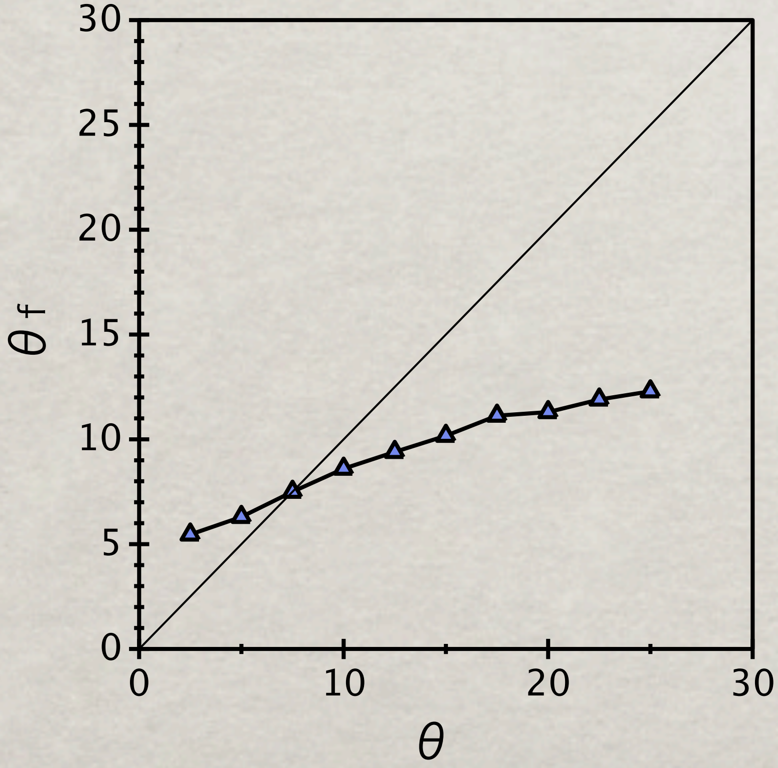




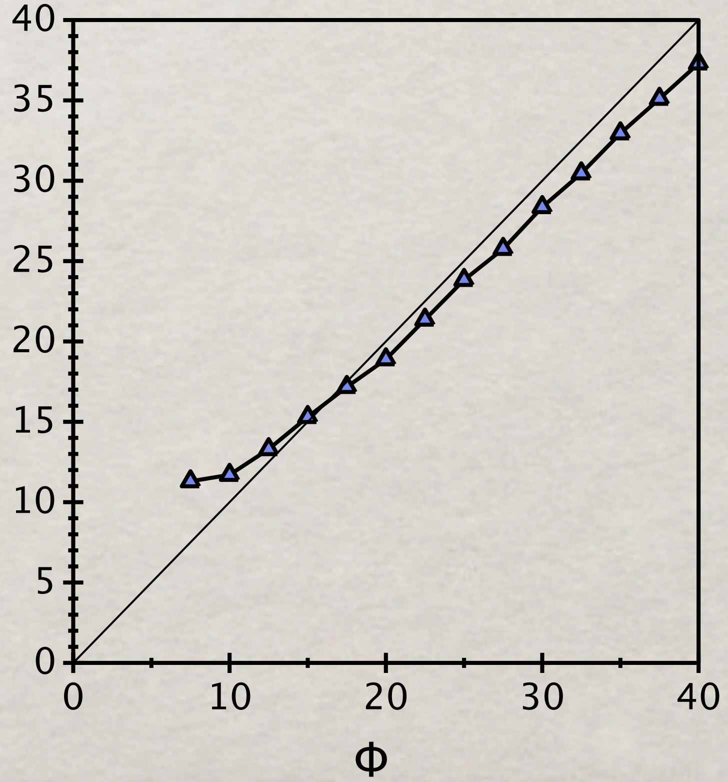
入射角・迎え角のTransfer Function



$\theta_0 = 8.0$



$\phi_0 = 16.0$



水面と円板の衝突のモデル解析

仮定：・回転速度は十分大きい → $\phi = \text{const.}$

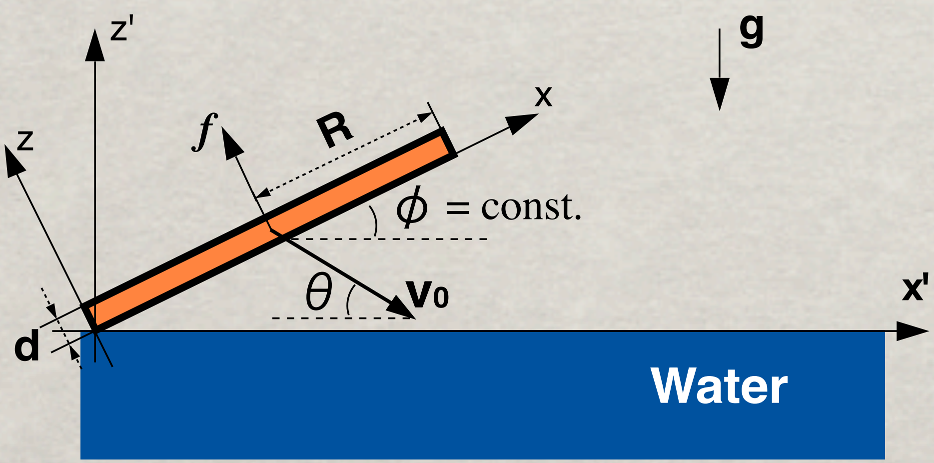
・衝突による水面の変形を無視。

・粘性を無視して、円盤には $p \sim \rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2$ で表される圧力のみが働く。

・空気の効果は無視（その密度は水に比べて 0.001倍と軽いため。）

円板にかかる力： $\boldsymbol{f} = \int_{\mathrm{disk's\ \ face}} p\boldsymbol{n}dS = \int_{\mathrm{disk's\ \ face}} C_D\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2\boldsymbol{n}/2dS$

$$= \frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})^2 S\boldsymbol{n}$$



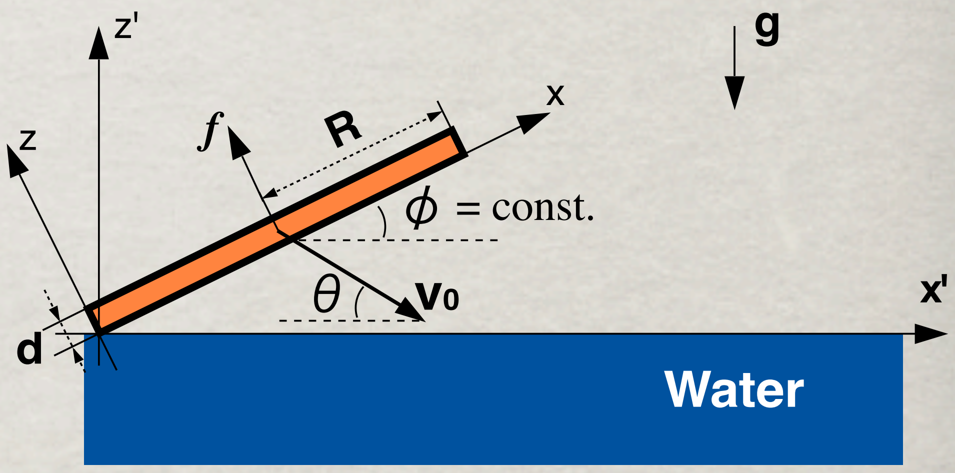
衝突のODEモデル（１）

無次元化した運動方程式

$$\ddot{x} = -\frac{1}{F}\sin\phi \quad \text{(xz座標系)}$$

$$\ddot{z} = \kappa S(z')\dot{z}^2 - \frac{1}{F}\cos\phi$$

$$\kappa = \frac{C_{\mathrm{D}} R\rho}{2\pi d\rho'}$$



(x,z)　：円盤下側の角の位置

$F = \dfrac{v_0^2}{gR}$ ：フロード数

$$S(z') = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 + \frac{z'}{\sin\phi}\right) - \left(1 + \frac{z'}{\sin\phi}\right)\sqrt{1 - \left(1 + \frac{z'}{\sin\phi}\right)^2}$$

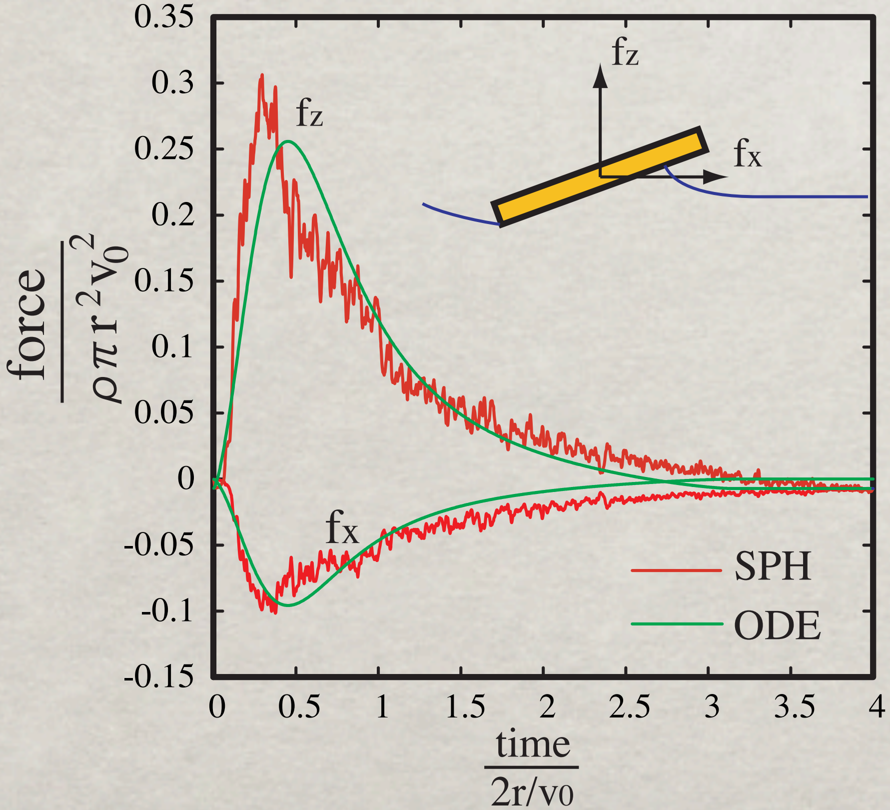
流体にひたっている面積。

ODEモデルと
SPHシミュレーションの比較

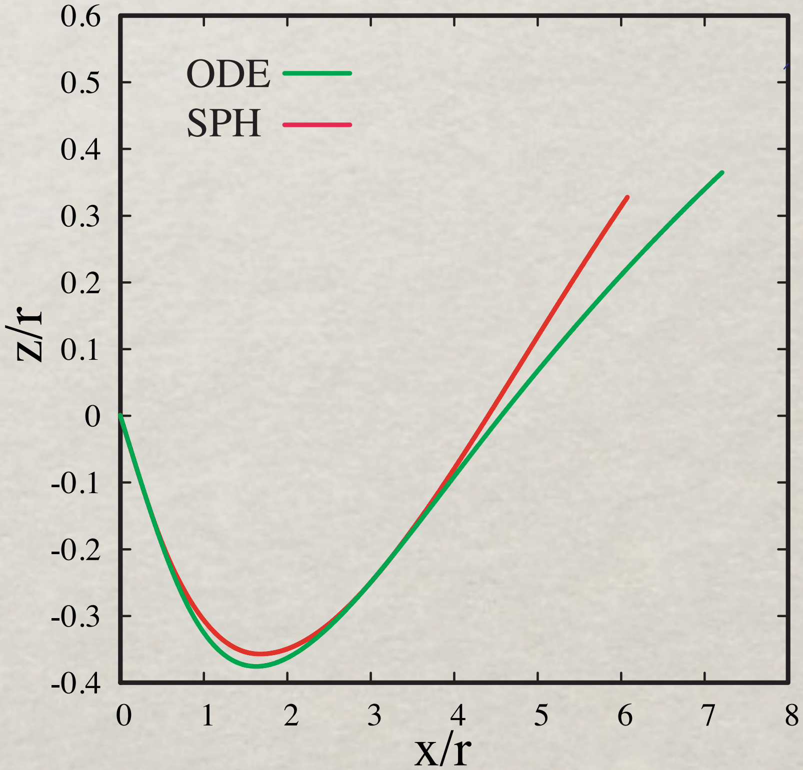
定数κの決定

$\varkappa$= 0.94,
(Fitting parameter)

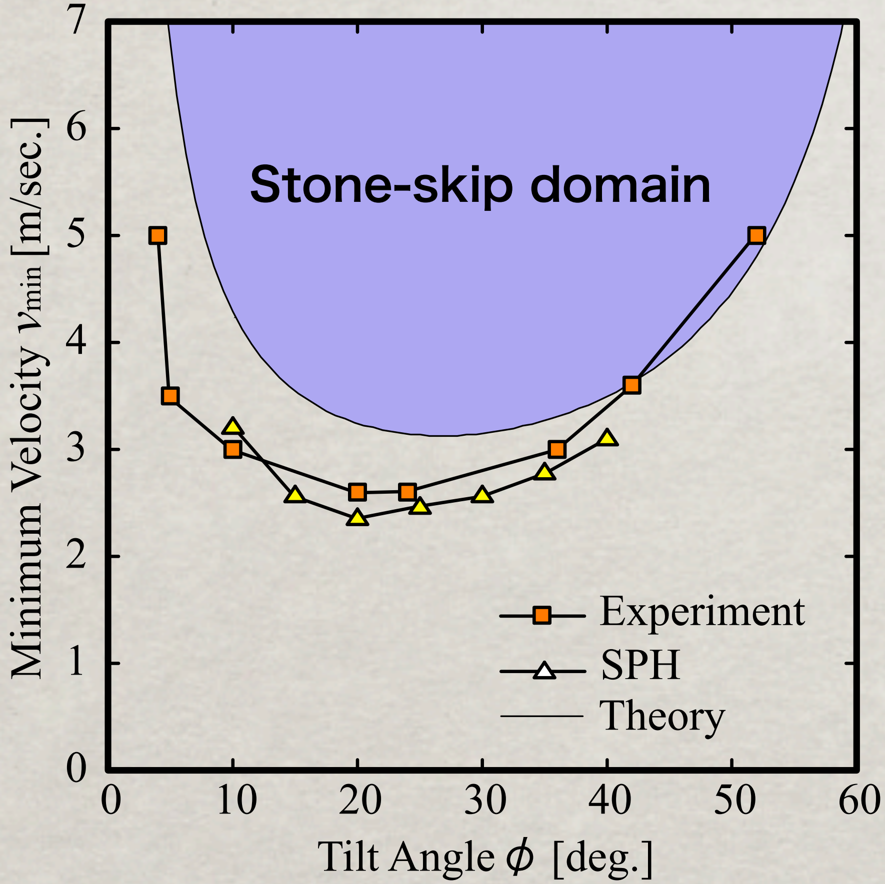
円板の受ける力

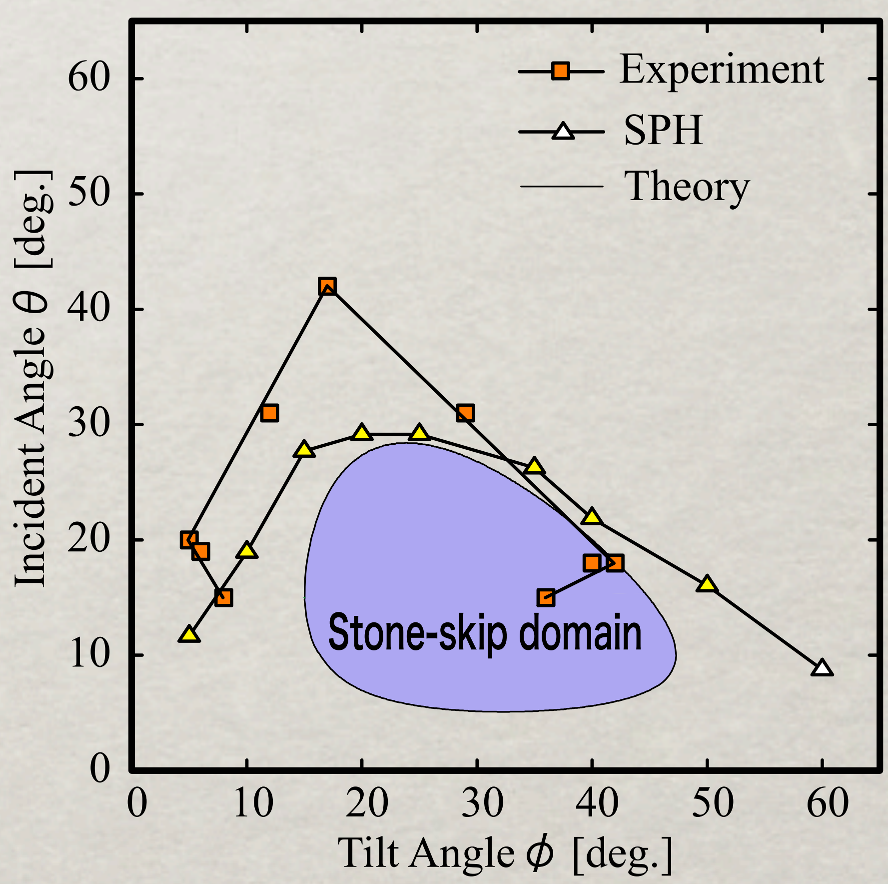


円板の軌道



ODEモデルと
SPHシミュレーション及び実験との比較





衝突のODEモデル—解析解

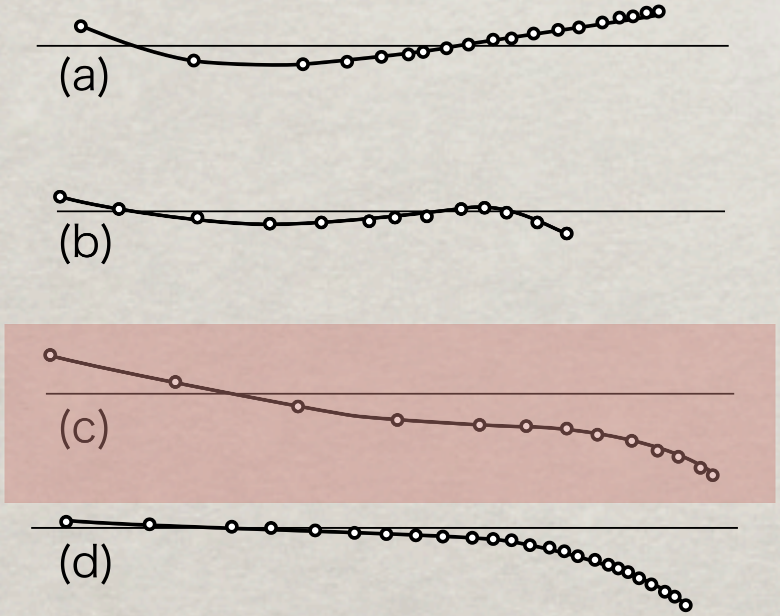
”反発”の定義…通常は「水面の高さを基準」にとる。**位置条件**

ここでは，「重力方向の速度を基準にとる。**速度条件**

「円盤の重力方向の速度が反転したら，
反発が　起こったものと，見なす。」

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{1}{F}\sin\phi \\ \ddot{z} &= \kappa S(z')\dot{z}^2 - \frac{1}{F}\cos\phi \end{aligned}$$

変曲点の存在条件をしらべる。



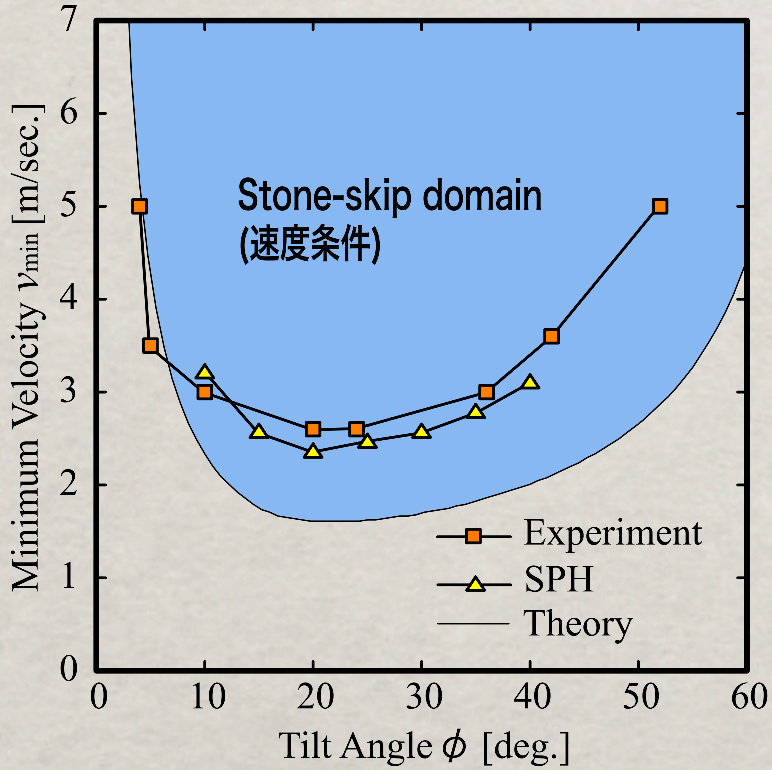
球と水面の衝突の実験で得られた
衝突後の球の軌道。

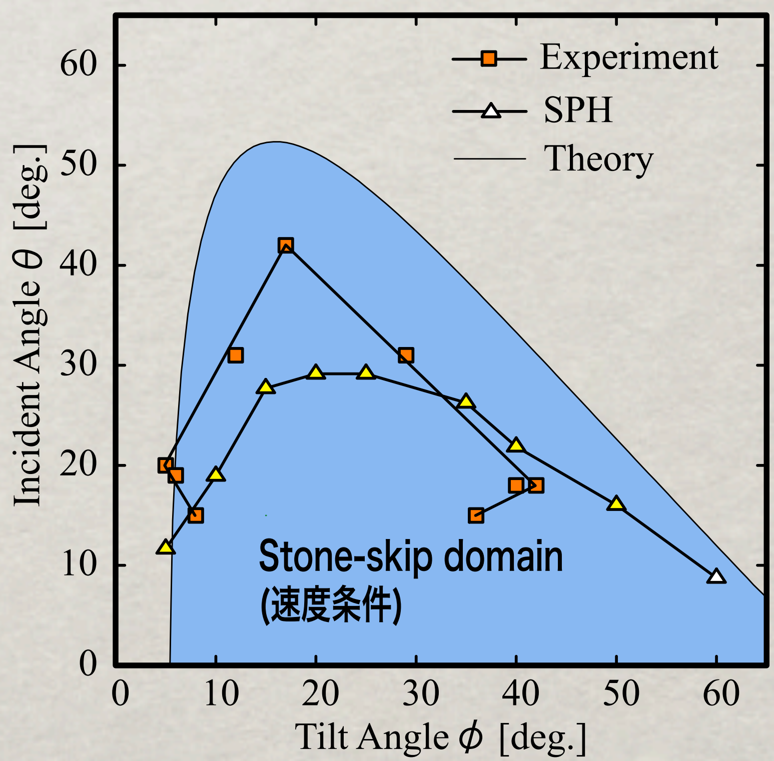
E. G. Richardson, *Proc. Phys. Soc. London, Sect. A* **61** (1948)

速度条件を用いた時の反発条件：
解析解と実験・シミュレーションの比較

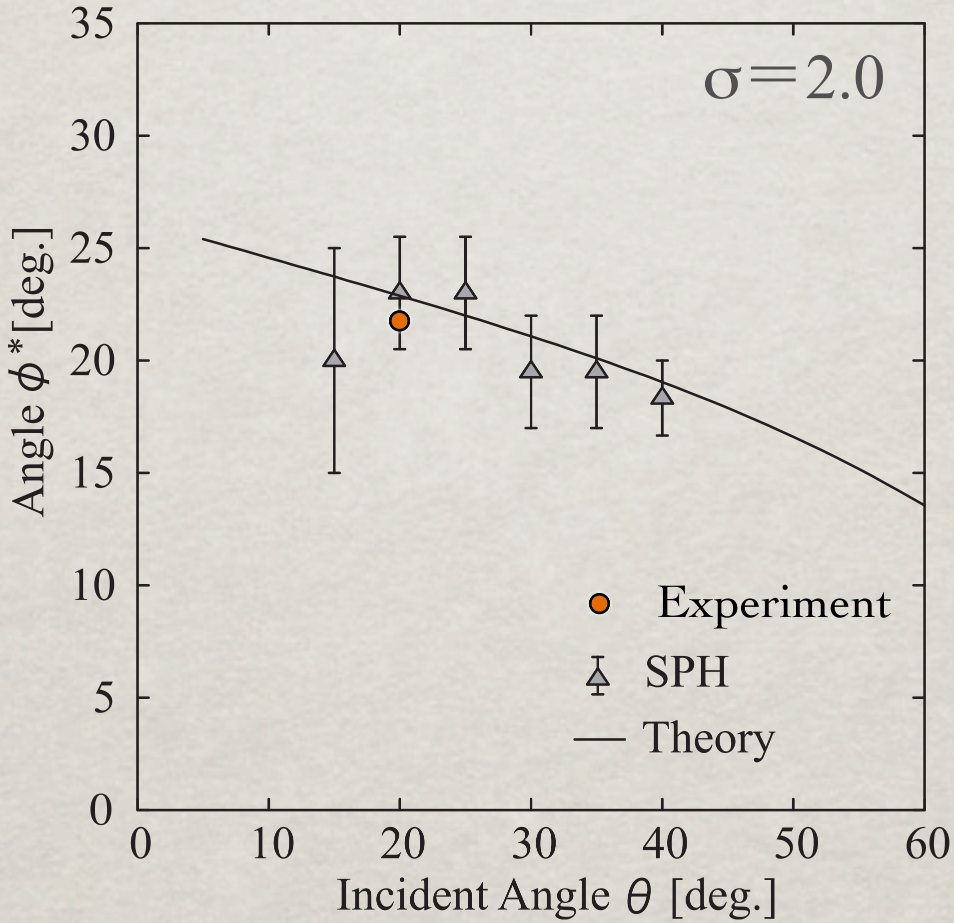
$$v_{\min} = \frac{\sqrt{2gR}}{\cos(\theta+\phi)} \left\{ x^* \sin\phi + \frac{\sigma d \cos\phi}{C_{\mathrm{D}} R \sin^2\phi} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\theta_{\max} = \arccos\sqrt{\frac{2}{F}\left(x^* \sin\phi + \frac{\sigma d \cos\phi}{C_{\mathrm{D}} R \sin^2\phi} \right)} - \phi$$

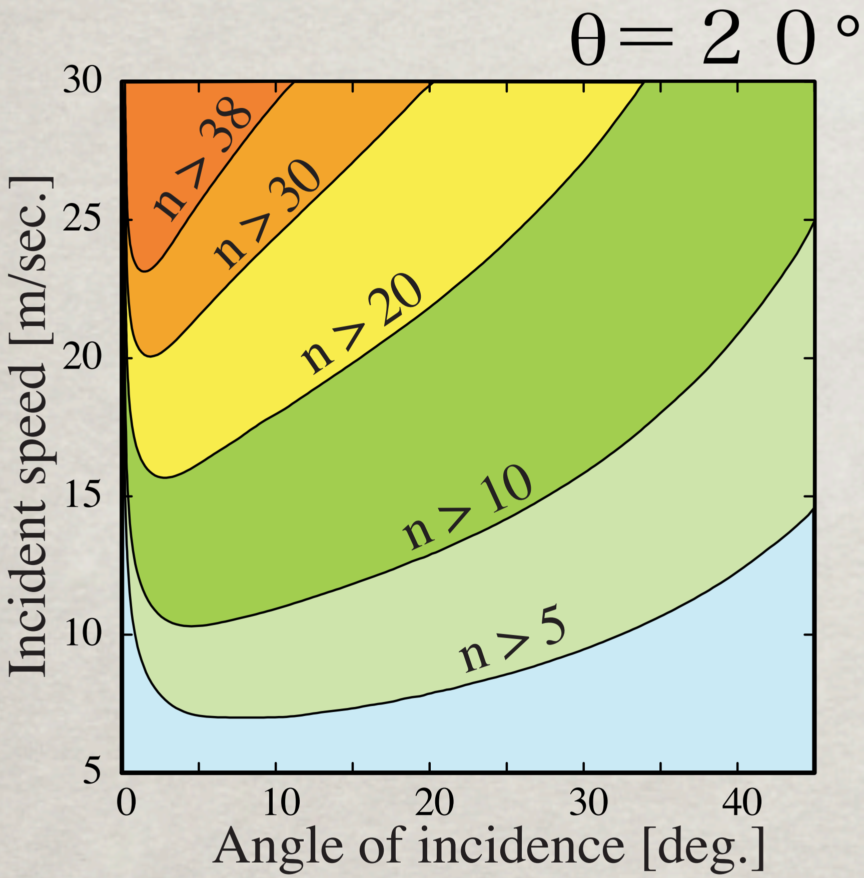


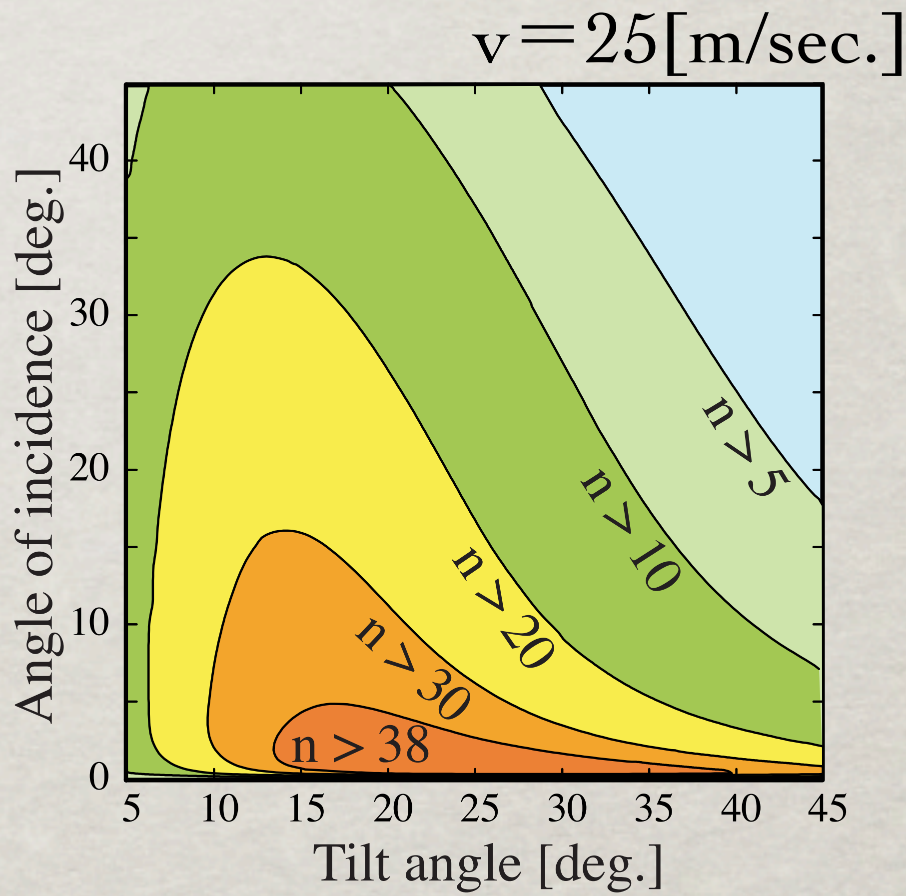


"Magic angle"と入射角度 θ の関係



反発回数の見積もり


θ＝２０°
n > 38
n > 30
n > 20
n > 10
n > 5
Incident speed [m/sec.]
Angle of incidence [deg.]
30
25
20
15
10
5
0
10
20
30
40


v＝25[m/sec.]
n > 5
n > 10
n > 20
n > 30
n > 38
Angle of incidence [deg.]
Tilt angle [deg.]
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

結論とまとめ

SPHによる衝突の直接シミュレーション

・2次元，３次元のSPHシミュレーションは，水面と円柱及び円板の衝突の反発条件を良く再現した。

・円板と水面の衝突について，衝突過程で円板が受ける力積をシミュレーションによって調べ，最適角度ϕ=20°に対して直感的な理解を得た。

問題点として：平均流速が大きい場合に，粒子法の特性に起因する余分な粘性が表れる。➡ 衝突速度が大きい場合，この粘性の効果によって，現象が正しく再現されない場合がある。

流体表面と物体の衝突のモデル化

・フルード数が１程度の領域に於ける円板と水面の衝突の実験事実が，単純なモデルによって十分に説明できた。

➡ 物体と流体間の衝突が極めて単純な力学過程として理解できる事を示した

シミュレーション法の応用分野と今後の課題

- ”濡れ”を伴う粉体系へのシミュレーション法の開発

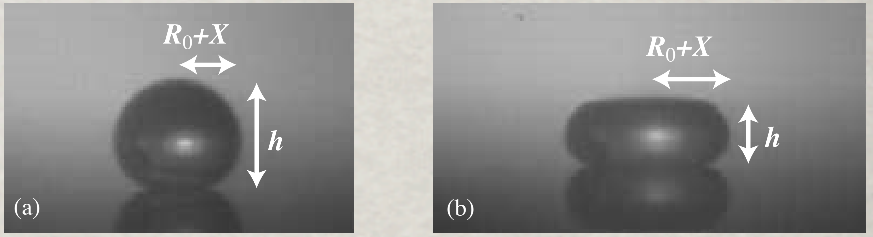
  → 地盤の液状化現象への応用

- 非常に大きな変形をともなう粘弾性体のシミュレーション

  -ゲルの衝突

  -水滴の衝突

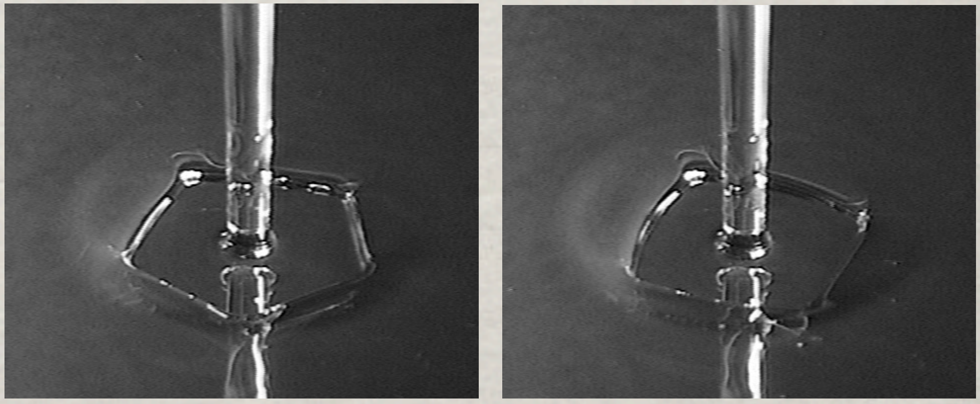
  -高圧の物理学の実験



K. Okumura *et*. *al*. Europhys. Lett. **62**, 237 (2003)

- 自由表面を持つ様々な現象への数値的なアプローチ

  -円形跳水の問題



Clive Ellegaard *et*. *al*., Nonlinearity, **12**, 1 (1999)
Nature, **392**, 23 (1998)